Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Junio 19 de 2020

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Sea n un entero positivo. Demuestre que $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$:

i. Algebraicamente.

ii. Por un argumento combinatorio (contando el número de subconjuntos con dos elementos de un conjunto con $2n$ elementos).

2. Sea f una función impar diferenciable en $\mathbb{R}$. Demuestre que para cada $b > 0$ existe un c en el intervalo $(-b, b\,)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)}{b}.$$

3. Diga si la siguiente integral es convergente o divergente, justificando rigurosamente su respuesta:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x}{\ln x + e^{x}}\, dx.$$

4. Un alambre delgado c tiene la forma de la curva de intersección del cono $z = 1 - r$ con el cilindro circular $r = 2\,\text{sen}\theta$, siendo $x \geq 0$ y $z \geq 0$.

i. Parametrizando la curva, halle el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ para mover una partícula, a lo largo de c, desde el punto $(0, 0, 1)$ hasta el punto $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, suponiendo que la curva está orientada en ese mismo sentido. Elabore una gráfica mostrando las dos superficies, la curva c y los puntos dados.

ii. ¿Se podría resolver la parte i. utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Línea? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, calcule de nuevo el trabajo usando este teorema.

5. ¿Es analítica la función $f(z) = e^{i\bar{z}^2}$? Justifique rigurosamente su respuesta.

6. Sea L la familia de los círculos centrados sobre la recta $y = x$ y que pasan por el origen. Demuestre que la familia L está descrita por la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy - y^2}{y^2 + 2xy - x^2}$$

y encuentre la familia de curvas ortogonal a L.

7. Determine si lo dicho en las siguientes afirmaciones es falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y Z es un subespacio vectorial de W, el conjunto

$$V_Z = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) \in Z\}$$

es un es un subespacio vectorial de V.

ii. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal uno a uno y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en V, el conjunto $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en W.

8. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución Poisson(λ_1), Poisson(λ_2) y Poisson(λ_3), respectivamente. Sea $S = X_1 + X_2 + X_3$.

i. Hallar la distribución condicional de (X_1, X_2, X_3) dado $S = n$, siendo n un natural positivo.

ii. Identificar la distribución condicional hallada en i. ¿A que experimento corresponde esta distribución?