Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Doctorado — Parte 1

Julio 7 de 2020

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Sea n un entero positivo. Demuestre que $\displaystyle\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$:

i. Algebraicamente.

ii. Por un argumento combinatorio (contando el número de subconjuntos con dos elementos de un conjunto con $2n$ elementos).

2. Determe los coeficientes a, b y c del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que la gráfica $y = p(x)$ tenga como eje de simetría la recta $x = 2$, intersecte al eje y en en punto $(0, 5)$ y su tangente en el punto de coordenada en x igual a 4 es paralela a la recta $y = 4x + 3$.

3. Determine la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los productos

$$a_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$

4. Considere la curva σ definida por la intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x + y + z = 1$. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 2x \cos y - 2z^3, 3 + 2ye^z - x^2 \sin y, y^2 e^z - 6xz^2 \rangle.$$

i. Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.

ii. Encuentre una función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla g$.

iii. Calcule $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

5. Considere la función $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ y denote por $C_r(z_o)$ al círculo de radio r centrado en $z_o \in \mathbb{C}$ en el plano complejo.

i. Diga cuales de las siguientes integrales coinciden, sin calcularlas, y explique claramente por qué en cada caso:

$$\int_{C_2(0)} f(z)dz, \quad \int_{C_1(1)} f(z)dz \quad \text{y} \quad \int_{C_3(1)} f(z)dz.$$

ii. Calcule el valor de tales integrales.

6. Sea L la familia de los círculos centrados sobre la recta $y = x$ y que pasan por el origen. Demuestre que la familia L está descrita por la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy - y^2}{y^2 + 2xy - x^2}$$

y encuentre la familia de curvas ortogonal a L.

7. Determine si lo dicho en las siguientes afirmaciones es falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si A es una matriz ortogonal $n \times n$ (con entradas reales), entonces existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz A.

ii. Si A y B son matrices $n \times n$ (con entradas reales) y tienen los mismos valores propios contados con multiplicidad algebraica, entonces A es similar a B.

8. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución Poisson(λ_1), Poisson(λ_2) y Poisson(λ_3), respectivamente. Sea $S = X_1 + X_2 + X_3$.

i. Hallar la distribución condicional de (X_1, X_2, X_3) dado $S = n$, siendo n un natural positivo.

ii. Identificar la distribución condicional hallada en i. ¿A que experimento corresponde esta distribución?