Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Octubre 21 de 2019

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Un espacio métrico X se denomina conexo por caminos si, para todo par de puntos $a, b \in X$, existe $f : [0,1] \to X$ continua tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i. Pruebe que $[0,1]$ es conexo.

ii. Pruebe que si X es camino conexo entonces X es conexo.

iii. Pruebe que si $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son espacios métricos camino conexos, también lo es $X_1 \times \cdots \times X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iv. Considere $G = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$. Pruebe que G es camino conexo. Identifique $\overline{G}$ y explique por qué no es camino conexo.

2.

i. Sean A y B subconjuntos del espacio topológico X, demuestre que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

ii. ¿Se puede generalizar la propiedad anterior a para uniones infinitas arbitrarias?

3. Sea G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo con $[G : H] = n$. Muestre que existe un subgrupo $N \subseteq H$ tal que N es normal en G y $[G : N] \geq n!$.

4. Muestre que si X y Y son campos vectoriales suaves sobre una variedad diferencial M, entonces su corchete de Lie $[X, Y]$ es un campo vectorial suave sobre M.

5. Sean $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ y $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Demuestre que $K/\mathbb{Q}$ es una extención de Galois con grupo de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ cíclico de orden 4.

6. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribución[1] Poisson(λ_X) y Poisson(λ_Y), respectivamente. Muestre que $Z = X + Y$ tiene una distribución Poisson($\lambda_X + \lambda_Y$).

[1]Recuerde que la distibución de Poisson(λ) está dada por $p_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$.