

**Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes**

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Octubre 21 de 2019

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.

Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

**Tiempo máximo: 180 minutos.**

1. Demuestre que para todo  $n \geq 3$ , si  $P$  es un polígono convexo de  $n$  lados, entonces el número de diagonales<sup>1</sup> de  $P$  es igual a  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

---

<sup>1</sup>Una *diagonal* de un polígono convexo de  $n$  lados (y por tanto de  $n$  vértices) es un segmento de recta entre dos vértices que no son contiguos.

2. Sea  $f(x) = x^2 + cx$ . Encuentre los valores de  $c$  para los cuales la recta  $y = 5x - 4$  es tangente la curva  $y = f(x)$ .

**3. a.** Diga para qué valores del parámetro real  $a$  las siguientes series convergen:

i.  $\sum_{n \geq 0} a^{\ln n}$ .

ii.  $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n n!}{n^n}$ .

**b.** Calcule la siguiente integral:  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$ .

4. Hallar el máximo y el mínimo de

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$

en el conjunto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$ .

5. Considere una curva cerrada simple  $\mathbf{c}$  en el plano complejo, orientada positivamente, tal que  $1$ ,  $i$  y  $-i$  están en el interior de  $\mathbf{c}$  y  $-1$  se encuentra en el exterior de  $\mathbf{c}$ . Calcule

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{dz}{z^4 - 1}.$$

6. Utilizando el cambio de variable  $z = \sqrt{x}$  resuelva la ecuación diferencial

$$4xy'' + 2y' + y = x.$$

7. Sea  $A$  una matrix  $3 \times 3$  con coeficientes reales tal que  $\det(A) = 1$ . Suponga que  $(1 + \sqrt{3}i)/2$  es un valor propio de  $A$ .

- i. Encuentre los otros valores propios de  $A$ .
- ii. Encuentre el polinomio característico de  $A$ .
- iii. Enuncie el teorema de Cayley-Hamilton para  $A$ .
- iv. Encuentre  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tal que  $A^{100} = aA^2 + bA + cI$  donde  $I$  es la matriz identidad.