Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Abril 30 de 2019

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que dada cualquier sucesión $\{x_n\}$ en $[0,1]$, existe una subsucesión $\{x_{n_i}\}$ tal que $\{f(x_{n_i})\}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$.

2. Sea T una matriz cuadrada. Muestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = 0$ si y sólo si su polinomio característico es un múltiplo no nulo de x^n.

3.

i. Sean A y B dos subconjuntos compactos de un espacio topológico de Hausdorff X. Mostrar que si A y B son disyuntos, entonces existen dos abiertos disyuntos U, V en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

ii. Mostrar que la condición de Hausdorff es necesaria.

4. Para cada par de grupos abajo, ¿son isomorfos o no isomorfos? Si son isomorfos encuentre un isomorfismo explícito, si no lo son justifique por qué no.

i. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ y $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

ii. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ y $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

iii. D_6 = simetrías del triángulo y S_3 = permutaciones de 3 letras.

5. Considere el conjunto

$$M_t = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = t\right\},$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Determine para qué valores de t el conjunto M_t es una variedad suave en $\mathbb{R}^3$ y, para tales valores, de un atlas con parametrizaciones explícitas para tal variedad.

6. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, i)$.

i. Demuestre que $[K : \mathbb{Q}] = 12$.

ii. Encuentre 5 cuerpos distintos $F_1, \ldots, F_5$ tales que $\mathbb{Q} \subset F_i \subset K$, para $i = 1, \ldots, 5$. (No es necesario justificar su respuesta.)

7. Sea
$$f(x,y) = C(x^2 + 2y^2)e^{-2x-3y}\mathbf{1}_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(x,y)$$
la densidad común del vector aleatório (X,Y).

i. Calcular $C > 0$.

ii. Calcular $\mathrm{Cor}(X,Y)$.

iii. Calcular
$$\mathbb{E}[X \mid Y](\omega) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{V}(X \mid Y)(\omega).$$