Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Abril 30 de 2019

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Demuestre, por inducción en n, que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$,

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r},$$

donde $\binom{n}{r}$ significa el número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que contienen exactamente r elementos.

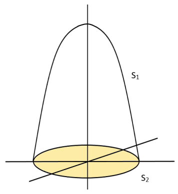
2. Considere la función $f(x) = x^7 + x^5 + 3$. Demuestre que existe la función inversa de f, denotada $g(x)$, y si $F(x) = \int_x^{-3} g(t)dt$ calcule $F'(5)$.

3. Estudiar la convergencia de las siguientes series

i. $\sum_{n\geq 0} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

ii. $\sum_{n\geq 0} (\sqrt[n]{n} - 1)$.

4. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x, 2x, 3y^2\big)$ y las superficies $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\}$ en el espacio, ambas orientadas respecto a la normal que apunta hacia arriba (ver figura).



Explique por qué

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

y úselo para calcular tal integral.

5. Considere el círculo **c** en el plano complejo dado por $\mid z - i \mid= 3$. Calcule

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2} dz.$$

6. Considere la ecuacion diferencial[1]

$$2x\sin(y)dx + x^2\cos(y)dy = 0, \qquad y(1) = \frac{\pi}{4}. \tag{0.1}$$

i. Mostrar que (0.1) es una ecuación diferencial ordinaria exacta.

ii. Resolver la ecuación.

iii. Calcular el valor $x_0 > 1$ tal que $y(x_0) = \frac{\pi}{6}$.

iv. Esbozar la solución para $1 \leq x \leq x_0$.

[1] Información que puede ser útil:

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \qquad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}, \qquad \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

7. Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y considere el subespacio ortogonal $V = \vec{v}^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$. Sea P la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre V.

i. Calcule la matriz de P en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

ii. Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ para la cual la representación matricial de P es diagonal.