Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Octubre 22 de 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Considere el intervalo $(0,2) \subset \mathbb{R}$ y sea $f : (0,2) \to \mathbb{R}$.

i. Pruebe que si f es uniformemente continua entonces es acotada. Pruebe que el recíproco es falso.

ii. Pruebe que si f es uniformemente continua es integrable con respecto a la integral de Riemann. Pruebe que el recíproco es falso.

2. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V, de dimensión finita, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W. Demuestre que si u es un vector en V tal que $u \notin W$, entonces existe v en $W^{\perp}$ tal que $\langle u, v \rangle \neq 0$. Utilice lo anterior para probar que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

3.

i. Muestre que un espacio métrico conexo X que contiene más de un punto es no enumerable.

ii. Dé un ejemplo de un espacio métrico no conexo que sea infinito y enumerable.

4.

i. Demuestre que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

ii. Indique los generadores de los siguientes subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ y justifique su respuesta:

  (a) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$

  (b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$.

5. Demuestre que si D_1 y D_2 son derivaciones suaves en $\mathbb{R}^n$, entonces $D_1D_2 - D_2D_1$ es una derivación suave en $\mathbb{R}^n$.

6. Sea K un campo. Recuerde que una *valuación discreta* en K es una función $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ que satisface: (1) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ para todo $a, b \in K^*$, (2) ν es sobreyectiva y (3) $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ para todos $x, y \in K^*$ tal que $x + y \neq 0$.

i. Sea $R = \{0\} \cup \{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$. Demuestre que R es un subanillo de K que contiene a la identidad (R se llama el *anillo de valuación de* ν).

ii. Demuestre que para todo $x \in K^*$ al menos un elemento de $\{x, x^{-1}\}$ está en R.

iii. Demuestre que el conjunto de unidades de R es $U(R) = \{x \in K^* : \nu(x) = 0\}$.

7.

i. Encuentre una familia de variables aleatorias que converge en probabilidad pero que diverge en L^1.

ii. Muestre que una familia de variables aleatorias que converge en probabilidad a una variable aleatoria en L^1, y que es uniformemente integrable, converge en L^1 a esta variable aleatoria.