Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Octubre 22 de 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo: 180 minutos**.

1. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, si un número $a \in \mathbb{N}$ tiene por lo menos n divisores primos distintos, entonces a tiene por lo menos 2^n divisores positivos distintos.

2. Considere la función $h(x) = 3x + e^{x-2} + 2$.

i. Explique por qué h es una función inyectiva.

ii. Si $f(x) = h^{-1}(x)$ hallar el valor de $f'(9)$.

3.

i. Evalúe la integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx$.

ii. Evalúe la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.

4. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\langle y, -x, z^3 \rangle$ y la curva σ de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$ en $\mathbb{R}^3$, orientada en sentido anti-horario.

i. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

ii. Utilice el *teorema de Stokes* para calcular la integral de la parte i.

5. Evalué la integral $\int_{\gamma} \frac{|z|e^z}{z^2}\, dz$, donde γ es el circulo con centro $0 \in \mathbb{C}$ y radio 2 orientado en sentido anti-horario.

6. Encuentre la solución de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$, reduciéndola a una ecuación de coeficientes constantes.

7. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\det A$, el polinomio característico de A, los valores propios y los espacios propios de A.