Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

20 de octubre del 2017

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Las respuestas deben ser justificadas.

Tiempo máximo: 180 minutos.

Nombres:
Apellidos:
Cédula:

De aquí en adelante, favor marcar cada hoja únicamente con su cédula, ****sin** indicar su nombre.**

I.

1. Demuestre (sin utilizar las fórmulas de Euler) que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $\cos x + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. Demuestre (sin utilizar las fórmulas de Euler) que, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene $\cos z + \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. Encuentre la expansión en serie de potencias de la función $f(z) = \cos(z)$ alrededor de $z = \frac{\pi}{2}$.

II. Sea (X, τ) un espacio topológico compacto y suponga que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una familia de abiertos tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Muestre que $\mathcal{B}$ es una subbase para la topología τ (i.e. τ es la menor topología que contiene a $\mathcal{B}$).

III. Sea n un entero positivo y sea D una matriz diagonal $n \times n$ con entradas $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Se considera el conjunto

$$C(D) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid AD = DA\}$$

Muestre que $C(D)$ es un espacio vectorial de dimensión finita y determine su dimensión.

IV.

1. ¿Cuáles de las variedades en la siguiente lista son difeomorfas entre sí? Justifique su respuesta.
   a) La esfera 2-dimensional $\mathbb{S}^2$.
   b) $\mathbb{R}^2$.
   c) El anillo $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
   d) El cuadrado abierto $\{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.
   e) $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.
   f) Un elipsoide.
2. ¿Es posible encontrar una aplicación suave $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que la preimagen de un valor regular de f sea difeomorfa a la botella de Klein? Justifique su respuesta.

V.

1. Sea X una variable aleatoria con distribución Normal$(0,1)$, cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que, para todo $c > 0$.

$$\Pr(|X| > c) \leq \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$$

2. Sea ahora $\mathbf{X}$ un vector de dimensión d cuyas coordenadas son variables con distribución Normal$(0,1)$. Pruebe que, para $c > 0$,

$$\Pr(\|\mathbf{X}\| > c) \leq \frac{d\sqrt{2d}}{c\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(c/\sqrt{d})^2}{2}}$$

siendo $\|\mathbf{X}\|$ la norma euclidiana del vector $\mathbf{X}$.

VI.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo. Muestre que la extensión $\mathbb{C}(t^n) \subset \mathbb{C}(t)$ es una extensión de Galois finita y determine su grupo Galois.

2. Sea $E \subset F \subset K$ una torre de campos donde F/E y K/F son finitas. Suponga que la extensión F/E es normal y que $\sigma : F \to K$ es un morfismo de cuerpos cuya restricción a E es la identidad. Muestre que $\sigma(F) = F$ y dé un ejemplo de extensiones no normales donde la anterior afirmación no se tiene.

VII. Sea $f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$ y tales que $|f(x)| = |g(x)| \neq 0$ para todo $x \in [a,\ b]$. Muestre que $f = g$ o $f = -g$ en $[a, b]$.