Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

20 de octubre del 2017

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.

Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

Tiempo máximo: 180 minutos.

I. Sean γ_1 y γ_2 los círculos de radio 1 y 3, respectivamente, centrados en el origen. Explique por qué

$$\oint_{\gamma_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz \neq \oint_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz.$$

II. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un sub-espacio no vacío de X. Se considera la función

$$f_A : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ínf}_{a \in A} d(x, a) \end{array}$$

Muestre que f_A es una función continua.

III. Sean K un cuerpo y V un K-espacio vectorial. Suponga que $n := \dim_K(V)$ es finita.

1. Muestre que toda proyección $P : V \to V$ es diagonalizable. Recuerde que una proyección P es una transformación lineal tal que $P \circ P = P$.

2. Sea $P : V \to V$ una proyección y suponga que su rango, es decir la dimensión de $\mathrm{Im}(P)$, es r. Muestre que el polinomio característico de P es $(x-1)^r x^{n-r}$.

IV. Muestre que para cualquier conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ existe un conjunto A a lo sumo enumerable tal que $A \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

V. Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$ y sea $X = U^2$.

1. Hallar la densidad de probabilidad de X.
2. Hallar el tercer cuartil de la distribución de X, es decir, el número ζ tal que $\Pr(X \leq \zeta) = \frac{3}{4}$.

VI. Ejercicio Abstracta 2.

VII. Considere el espacio $C([0,1],\mathbb{R})$ de funciones continuas en $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Defina, para $f \in C[0,1]$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$.

1. Explique por qué existe la integral de Riemann de f^2.
2. Pruebe que $\| \; \|_2$ es una norma.
3. Pruebe que $\| \; \|_2$ es continua con respecto a $\| \; \|_\infty$.
4. Pruebe que $C[0,1]$ no es completo con respecto a $\| \; \|_2$.