Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

20 de octubre del 2017

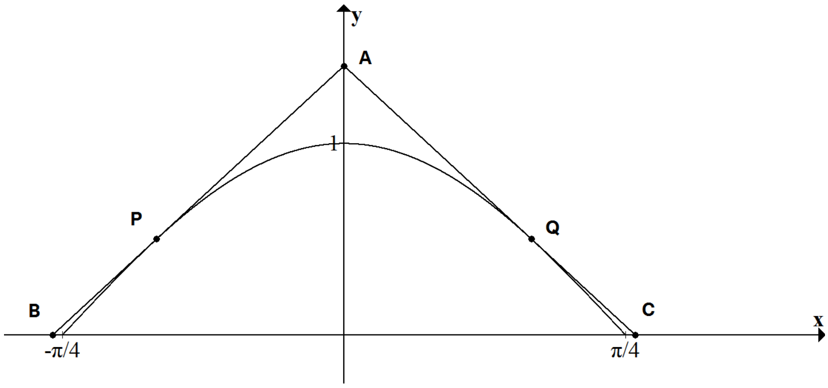
Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.

Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

Tiempo máximo: 180 minutos.

I. Se considera la curva (C) de ecuación $y = \cos(2x)$ con $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Para todo $P = (x_P, y_P)$ en (C), se denota Δ_P la recta tangente a (C) en P.

Si $x_P < 0$, se denota A el punto de intersección de Δ_P con el eje de los y y B el punto de intersección de Δ_P con el eje de los x (ver dibujo).



1. Muestre que existe un punto $P = (x_P, y_P)$ en (C), con $x_P < 0$, tal que el ángulo orientado formado por el eje de los x y la recta Δ_P tenga medida $\frac{\pi}{3}$.
2. Sea Q el punto de (C) de abscisa $-x_P$. Muestre que la recta (AQ) es tangente a (C) en Q.
3. Sea C el punto de intersección de la recta (AQ) con el eje de los x. Muestre que el triángulo ABC es equilateral.

II.

1. Encuentre todos los valores de x para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge.

2. Halle el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ \ x \in [1,2],\ \text{alrededor del eje } y.$$

III. Sea Σ la superficie de ecuación $xy - z^2 = 16$ en $\mathbb{R}^3$.

Encuentre los puntos de Σ más cercanos al punto de coordenadas $(0, 0, 0)$.

IV. Considere el vector en $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ el espacio ortogonal a $\vec{v}$. Encuentre una base ortonormal para W.

2. Sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal que usted encontró en el inciso anterior. Halle una matriz ortogonal Q (es decir una matriz cuadrada tal que $QQ^T = I$) que cumpla con que $\mathcal{B}$ es una sub-familia de la familia conformada por las columnas de Q.

V. Resuelva la ecuación diferencial

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx = \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right] dy$$

con condición inicial $y(2) = 1$.

VI. Sean a y b números enteros. Demuestre que si a y b son primos relativos, entonces ab y $a+b$ son también primos relativos.

VII. Sea X un conjunto de cardinalidad 23 y G un grupo de orden 35. Muestre que toda acción de G sobre X tiene al menos un punto fijo.