Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Mayo 19 de 2017

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Sea X un espacio métrico compacto, sea Y un espacio métrico y sea $f : X \to Y$ una función continua. Pruebe que f es uniformemente continua.

2. Sean A y B matrices cuadradas de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Suponga que para toda matriz cuadrada X de dimensión n se tiene que $\det(A+X) = \det(B+X)$. Muestre que $A = B$.
Sugerencia: Haga primero el caso $B = 0$, en este caso si el rango de A no es 0 obtenga una contradicción.

3. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ con finitas clases. Demuestre que, con la topología cociente, $\mathbb{R}/\sim$ no es de Hausdorff.
(Recuerde que para un espacio topológico (X, τ) y una función sobreyective $\pi : X \to Y$, la topología cociente en Y es aquella para la cual $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \in \tau$.)

4. Demuestre que si $p(z)$ es un polinomio y γ es un círculo en $\mathbb{C}$, centrado en el origen y sobre el cual no hay ninguna raiz de $p(z)$, entonces la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{p'(z)}{p(z)}dz$$

es igual al número de raices de $p(z)$ encerradas en el círculo γ, contando multiplicidades.

5.

i. Si x, g son elementos del grupo G, muestre que $o(x) = o(gxg^{-1})$. Deduzca que $o(ab) = o(ba)$ para todo par $a, b \in G$.

ii. Sea A un grupo abeliano. Muestre que, para $n \in \mathbb{Z}^{>0}$, $\{a^n : a \in A\}$ y $\{a \in A : a^n = 1\}$ son subgrupos de A. Muestre que, para $n \geq 3$, $\{x \in D_n : x^2 = 1\}$ no es un subgrupo de $D_n = \langle r, s | s^2 = (sr)^2 = r^n = 1 \rangle$ (grupo dihedral).

6. Para una superficie Σ, parametrizada por

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

con $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, muestre que la integral

$$\int\int_{\Sigma} P\, dx \wedge dy$$

es igual al flujo del campo vectorial $(0, 0, P(x,y,z))$ a través de la superficie.

7. Un fumador lleva una caja de fósforos en el bolsillo izquierdo de su chaqueta y otra caja idéntica en el bolsillo derecho. Inicialmente, cada caja contiene 20 fósforos. Cada vez que desea fumar, el hombre elige uno de los bolsillos al azar y toma un fósforo de la caja en el bolsillo elegido. Eventualmente, al elegir una de las cajas, encuentra que esta está vacia. ¿Cual es la probabilidad de que en ese momento en la otra caja queden k fósforos, para $0 \leq k \leq 20$?