Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Mayo 19 de 2017

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo: 180 minutos**.

1. Suponga que $n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $d = \mathrm{MCD}(s, n)$ y

$$sa \equiv sb \pmod{n}.$$

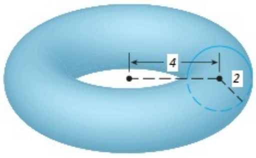
Demuestre que

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ \frac{n}{d}).$$

2. Sea P un punto sobre la curva $y = \frac{1}{x}$, sea Q el intercepto con el eje x de la recta tangente a la curva en el punto P y sea O el origen. Demuestre que triángulo OPQ siempre tiene área igual a 1.

3. Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{3x}}\,dx.$

4. Considere la superficie del toro T indicada en la figura, parametrizada por



$$x = (4+2\cos\phi)\cos\theta, \quad y = (4+2\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = 2\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

i. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(0, 5, \sqrt{3})$.

ii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(0, 5, \sqrt{3})$.

iii. Demuestre que el área de la superficie es igual a $32\pi^2$.

5. Sea C la curva descrita por la ecuación $z(t) = e^{it}$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$.

i. Muestre que para toda constante real a, $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$

ii. Con el resultado anterior puebe que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{a\cos t} \cos(a \operatorname{sen} t) dt = \pi.$

6. Una bola de naftalina que inicialmente tenía un radio de $\frac{1}{2}$ cm, al cabo de un mes tiene sólamente $\frac{1}{4}$ cm de radio. Suponiendo que se evapora a un ritmo proporcional a su superficie, encuentre el radio en función del tiempo. ¿Cuántos meses tardará en desaparecer?

7. Sean $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Sea $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ la matriz cuya columna i-ésima es $\vec{u}_i$, para $i = 1, 2$. Muestre que $\mathsf{Ker}(A^T) = \text{span}\{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\}$.