Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Mayo 13 de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Sean $f_n, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente y g es uniformemente continua. Demuestre que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

2. Sea $P : V \to V$ una transformación lineal en un espacio vectorial V tal que $P^2 = P$, $P \neq 0, I$. Muestre que $V = \mathsf{Nuc}(P) \oplus \mathsf{Im}(P)$ y halle los valores propios de P.

3. Sea $\mathcal{C}$ una familia de compactos en un espacio de Hausdorff X tal que cada intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ es conexa. Demuestre que la intersección $\bigcap \mathcal{C}$ de la familia es un conjunto conexo y compacto.

4. Demuestre o refute con un ejemplo la siguiente afirmación: Si $f(z)$ es una función analítica en un disco abierto $D \subset \mathbb{C}$, con un cero de orden $n \in \mathbb{N}$ en $z_o \in D$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = n.$$

5. Considere el grupo abeliano A generado por a, b y c y determinado por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} 2a + 4b + 4c &= 0 \\ -6a + 6b + 12c &= 0 \\ 10a - 4b - 16c &= 0. \end{aligned}$$

Por el *teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados*, A es isomorfo a un producto de grupos cíclicos. Encuentre dicha descomposicin.

6. Demuestre o refute con un ejemplo la siguiente afirmación: Existe un campo vectorial suave sobre la esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ que no se anula en ningún punto.

7. Se genera un punto X al azar, con distribución uniforme, dentro de la bola unitaria tridimensional Ω:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 \leq 1\},$$

siendo $\|x\|$ la norma euclideana de $\mathbb{R}^3$. Por definición de la distribución uniforme, si A es un subconjunto medible de Ω, entonces $\Pr(X \in A) = \mathrm{vol}(A)/\mathrm{vol}(\Omega)$. Hallar la función densidad de probabilidad de la variable $R = \|X\|$. Puede ser útil recordar que el volumen de una bola de radio r es $4\pi r^3/3$.