Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Mayo 13 de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo: 180 minutos**.

1. Sean a, b números enteros. Demuestre que si a y b son primos relativos, entonces ab y $a + b$ son también primos relativos.

2. Muestre que la gráfica de la función $f(x) = e^{x^3} + e^{-4x}$ tiene por lo menos un punto en el cual la recta tangente es horizontal.

3. Halle el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva dada por $y = \sqrt{4 - x^2}$, para $x \in [-1, 1]$, alrededor del eje x.

4. Considere el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$ y la región Ω del espacio que es interior tanto al cilindro como al paraboloide, y que se encuentra sobre la curva de intersección de ambos. Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

donde $\vec{F} = \langle 2x, z, 2z \rangle$ y $S = \partial\Omega$ es la superficie que encierra el volumen de la región descrita (orientada según la normal exterior).

5. Calcule la integral $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz$.

6. Considere la ecuación diferencial $X'(t) = AX(t)$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

i. Calcular e^{tA} para todo $t \in \mathbb{R}$.

ii. Hallar una base del espacio de soluciones de la ecuación $X'(t) = AX(t)$.

iii. Hallar la solución del problema de Cauchy

$$(\mathrm{C}) : X'(t) = AX(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Determine si la matriz A es invertible y en caso afirmativo encontrar su inversa A^{-1}.

ii. Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2. \end{array} \right.$$

iii. Sean $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 3, 0)$ y $\vec{w} = (1, 3, 1)$. Determine si el vector $\vec{b} = (2, 3, -2)$ pertenece a $\mathsf{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3\}$, el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$. En caso afirmativo escriba $\vec{b}$ como una combinación lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$.

iv. Diga si todo vector en $\mathbb{R}^3$ pertenece a $\mathsf{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.