1. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Examen de Admisión al Posgrado
Noviembre 11 de 2014

2. PRIMERA PARTE (2 HORAS)

(1) Calcular la integral
$$\int \frac{x+2}{x^3+2x}dx.$$
(2) Halle todos los valores $x > 0$ para los cuales la función
$$f(x) = \int_0^{x^3} \frac{sen\ t}{t}\,dt$$
alcanza un máximo local.

(3) ¿Verdadero o falso? Demuestre su respuesta:
a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ converge uniformemente en un intervalo abierto que contiene a 0.
b) Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en x es continua en x.

(4) Halle el volumen del sólido de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 2x$, $0 \le z \le 5$ y $x^2 + y^2 = 2y$, $0 \le z \le 5$.

(5) Resolver la ecuacion diferencial: $y' + y = \sqrt{y}$.

(6) Sea K un campo. Muestre que si $A \in M_{n\times n}(K)$ es un matriz invertible entonces existe un polinomio $p(x) \in K[x]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

(7) Sea $f = u + iv$ una función analítica. Considere las curvas dadas de forma implícita por $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$. Muestre que si dichas curvas se intersectan en un punto (x_0, y_0) entonces son ortogonales en (x_0, y_0).

(8) Determine los primos p para los cuales la congruencia
$$x^2 + x + 1 \equiv 0\ (mod p)$$
tiene solución. Ayuda: considere soluciones no triviales de $x^3 = 1$ en $\mathbb{Z}_p^*$.

3. Segunda parte (2 horas)

(1) Sean X, Y espacios métricos con Y completo, sea $A \subset X$ un subconjunto denso y sea $f : A \to Y$ una función uniformemente continua. Pruebe que existe una única $\widehat{f} : X \to Y$ uniformemente continua que extiende a f.

(2) a) Sean X y Y espacios topológicos con Y de Hausdorff y $f : X \to Y$. Muestre que si f es continua entonces $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$ (con la topología producto).
b) Muestre que no vale la recíproca de (a).

(3) Sea S una superficie suave acotada en $\mathbb{R}^3$ tal que cada rayo desde el origen corta a S a lo sumo una vez y sea C el cono sólido entre el origen como vértice y S. Si Σ es la superficie de intersección de C con la superficie esférica de radio 1 centrada en el origen, muestre que

$$Area(\Sigma) = \iint_S \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \cdot \overrightarrow{n} dS$$

donde $\overrightarrow{n}$ es la normal unitaria a S exterior al cono C. (Ayuda: utilice el Teorema de Gauss y el hecho de que $div \ \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} = 0$.)

(4) Sea X una variable aleatoria no negativa con media y varianza finitas y $a > 0$. Muestre la desigualdad de Markov $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$, y deduzca la desigualdad de Chebyshev $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$.

(5) Sean G y H grupos abelianos y $f : G \to H$ un homomorfismo. Demuestre que si existe un homorfismo $g : H \to G$ tal que que $f \circ g = Id_H$ entonces $G \approx H \times Ker(f)$.

(6) Sea R una anillo conmutativo con 1. Muestre que R es isomorfo al producto de dos campos si y sólo si R contiene dos ideales maximales $M \neq N$ tales que $M \cap N = 0$.

(7) Sea p un primo impar y sea L/F una extension de campos que es de Galois con grupo de Galois $Gal(L/F) = S_p$.
a) Muestre que existe una subextensión $F \leq K \leq L$ tal que $[K : F] = p$.
b) Muestre que no existe subsextensión $F \leq K \leq L$ tal que $[K : F] = p$ con K/F de Galois.