

# MATE 1252 - Examen Final - Diciembre 9 de 2019 - Tema B

Nombre: \_\_\_\_\_ Código: \_\_\_\_\_

P1:	P2:	P3:	P4:	P5:	P6:	NOTA:
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------

No está permitido el uso de ningún tipo de apuntes, libros o calculadoras. Cualquier dispositivo electrónico (incluido su celular) debe permanecer apagado durante el examen.

**Importante:** Para obtener el máximo (o algún) puntaje en cada problema, además de la respuesta correcta, se debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a ésta (a menos que se diga explícitamente lo contrario).

**Duración: 130 minutos**

1. (8pts) Determine si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 1}$  converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge. Indique el (los) criterio(s) utilizado(s) y verifique todas las hipótesis que permiten utilizar dicho(s) criterio(s).

2. (8pts) Calcule la integral  $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(-3x) dx$ .

3. (8pts) Sea  $f(t) = e^{-t^2/2}$ .

(a) Encuentre la serie de Taylor de la función  $f$  centrada en  $t = 0$ .

(b) Evalúe la integral  $\int_0^x e^{-t^2/2} dt$  como una serie de potencias.

(c) Sea  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , donde  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  es la serie de potencias hallada en (b). Calcule  $p(1)$ .

4. (9pts) La cantidad del ingrediente activo en las pastillas fabricadas por una farmacéutica es una variable aleatoria  $X$ , con distribución normal de media  $\mu = 5$  mg y desviación estándar  $\sigma = 0,1$  mg.
- (a) ¿En qué porcentaje de las pastillas elaboradas la cantidad de ingrediente activo se desvía de la media en más de 0,2 mg?
  - (b) Resuelva (a) de forma aproximada, usando solo la desigualdad de Chebyshev.
  - (c) ¿Cuál es el valor apropiado para  $C$  de manera que una pastilla seleccionada al azar tenga la cantidad de ingrediente activo menor que  $C$  con probabilidad 0,8944?

5. (8pts) Una urna contiene nueve bolas rojas y siete bolas azules. Dos bolas se van a sacar de la urna, una a la vez sin reemplazo.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean rojas?
  - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sacada sea roja y la segunda azul?
  - (c) ¿Cuál es la probabilidad de que entre las dos bolas sacadas una sea roja y la otra azul?

6. (9pts) El tiempo necesario para que estudiantes completen un examen de una hora es una variable aleatoria con una función de densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} y^2 + cy, & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $c$ .
- (b) Encuentre  $E(Y)$ .
- (c) Encuentre la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar termine en menos de media hora.
- (d) Dado que un estudiante particular necesita al menos 15 minutos para completar el examen, encuentre la probabilidad de que requiera al menos 30 minutos para terminar.

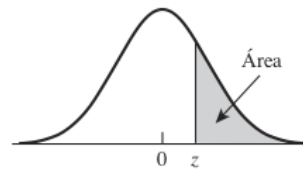


Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango( $X$ )	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Bin( $n, p$ )	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$	$np$	$np(1-p)$
Hipergeo( $n, N, M$ )	$\frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Geo( $p$ )	$(1-p)^{x-1} p$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
BinNeg( $k, p$ )	$\binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$	$\{k, k+1, \dots\}$	$k/p$	$k(1-p)/p^2$
Poisson( $\lambda$ )	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	$\lambda$	$\lambda$
N( $\mu, \sigma^2$ )	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x \in \mathbb{R}$	$\mu$	$\sigma^2$
Unif( $a, b$ )	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Beta( $a, b$ )	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$0 < x < 1$	$a/(a+b)$	$ab/((a+b)^2(a+b+1))$
Gamma( $\alpha, \beta$ )	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$	$x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
exp( $\beta$ )	$(1/\beta)e^{-x/\beta}$	$x > 0$	$\beta$	$\beta^2$



**Tabla 4 Áreas de curva normal**  
**Probabilidad normal estándar en cola derecha**  
**(para valores negativos de  $z$ , las áreas se encuentran por simetría)**



$z$	Segundo lugar decimal de $z$									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.00135									
3.5	.000233									
4.0	.0000317									
4.5	.00000340									
5.0	.000000287									

De R. E. Walpole, *Introduction to Statistics* (New York: Macmillan, 1968).

Función de Distribución Acumulativa N(0,1):  $F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5	0.50398	0.50797	0.51196	0.51595	0.51993	0.52392	0.5279	0.53188	0.53585
0.1	0.53982	0.54379	0.54775	0.55171	0.55567	0.55961	0.56355	0.56749	0.57142	0.57534
0.2	0.57925	0.58316	0.58706	0.59095	0.59483	0.5987	0.60256	0.60641	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62171	0.62551	0.6293	0.63307	0.63683	0.64057	0.6443	0.64802	0.65173
0.4	0.65542	0.65909	0.66275	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69846	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72574	0.72906	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75174	0.7549
0.7	0.75803	0.76114	0.76423	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78523
0.8	0.78814	0.79102	0.79389	0.79673	0.79954	0.80233	0.8051	0.80784	0.81057	0.81326
0.9	0.81593	0.81858	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83397	0.83645	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	0.85314	0.85542	0.85769	0.85992	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87285	0.87492	0.87697	0.87899	0.88099	0.88297
1.2	0.88493	0.88686	0.88876	0.89065	0.89251	0.89435	0.89616	0.89795	0.89972	0.90147
1.3	0.90319	0.9049	0.90658	0.90824	0.90987	0.91149	0.91308	0.91465	0.9162	0.91773
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	0.92647	0.92785	0.92921	0.93056	0.93188
1.5	0.93319	0.93447	0.93574	0.93699	0.93821	0.93942	0.94062	0.94179	0.94294	0.94408
1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94844	0.94949	0.95052	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448
1.7	0.95543	0.95636	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96079	0.96163	0.96246	0.96327
1.8	0.96406	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	0.96784	0.96855	0.96925	0.96994	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97319	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97614	0.9767
2.0	0.97724	0.97778	0.9783	0.97882	0.97932	0.97981	0.9803	0.98077	0.98123	0.98169
2.1	0.98213	0.98257	0.98299	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98499	0.98537	0.98573
2.2	0.98609	0.98644	0.98679	0.98712	0.98745	0.98777	0.98808	0.98839	0.98869	0.98898
2.3	0.98927	0.98955	0.98982	0.99009	0.99035	0.99061	0.99086	0.9911	0.99134	0.99157
2.4	0.9918	0.99202	0.99223	0.99245	0.99265	0.99285	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99476	0.99491	0.99505	0.9952
2.6	0.99533	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99597	0.99609	0.9962	0.99631	0.99642
2.7	0.99653	0.99663	0.99673	0.99683	0.99692	0.99702	0.9971	0.99719	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99759	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99794	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99824	0.9983	0.99835	0.99841	0.99846	0.99851	0.99855	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99873	0.99877	0.99881	0.99885	0.99889	0.99892	0.99896	0.99899
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99923	0.99926	0.99928
3.2	0.99931	0.99933	0.99935	0.99938	0.9994	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99949
3.3	0.99951	0.99953	0.99954	0.99956	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99963	0.99965
3.4	0.99966	0.99967	0.99968	0.99969	0.9997	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975