Universidad de los Andes – MATE 1214 – Semestre 201620

Taller sobre ecuaciones diferenciales

(Elaborado por el profesor César Rodríguez)

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.
   (a) $y\ln(x)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y+1}{x}\right)$ (con $x > 1$)
   (b) $(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2$ (con $x \neq \pm 1$)
   (c) $y' + \frac{1}{x}y = 3\sin(2x)$ (con $x > 0$)
   (d) $e^x y\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
   (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1-x^2}$ (con $x \neq \pm 1$)
   (f) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$
   (g) $(1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$
   (h) $\frac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 con coeficientes constantes.
   (a) $y'' - 3y' + 4y = 0$
   (b) $y'' + iy' + y = 0$
   (c) $y'' - 2y' + 6y = 0$
   (d) $3y'' + 2y' + 4y = 0$

3. Resolver.
   (a) Encuentre una ecuación de la curva que pasa por el punto $(0,1)$ y cuya pendiente en (x,y) es xy.
   (b) Hallar la función f de tal manera que
   $$f'(x) = f(x)(1-f(x))$$
   con la condición inicial $f(0) = \frac{1}{2}$.
   (c) Resolver la ecuación diferencial
   $$y' = x + y$$
   haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

(d) Resolver la ecuación diferencial

$$xy' = y + xe^{y/x} \quad (\text{con } x \neq 0)$$

haciendo el cambio de variable $u = y/x$.

Aplicaciones:

i) **Mezclas:** Al mezclar dos fluidos, a veces se originan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Si $y(t)$ es la cantidad de sustancia (sal por ejemplo) en un tanque en un instante t. La razón neta con que cambia la cantidad de sal en un instante t está dada por la EDO (ecuación diferencial ordinaria):

$$\frac{dy}{dt} = R_e - R_s,$$

donde R_e es la razón con que entra la sustancia y R_s es la razón con la que sale.

ii) **Ley natural de crecimiento y decrecimiento:** El modelo natural está dada por la EDO con valores iniciales:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0$$

Donde P_0 es la población inicial y k es una constante de proporcionalidad (si $k > 0$ la ecuación es de crecimiento, si $k < 0$ la ecuación es de decrecimiento). La EDO tiene una solución $P(t) = P_0 e^{kt}$.

iii) **Ecuación diferencial logística:** El modelo de la EDO logística es

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{S}\right) \qquad P(0) = P_0$$

Donde S es el soporte y k es una constante de proporcionalidad. La solución está dada por la función

$$P(t) = \frac{S}{1 + Ae^{-kt}}, \qquad A = \frac{S - P_0}{P_0}.$$

iv) **Ley de Newton del enfriamiento:** La formulación matemática de la ley empírica de Newton, relativa al enfriamiento de un objeto, se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

donde k es una constante de proporcionalidad, $T(t)$ es la temperatura del objeto cuando $t > 0$ y T_a es la temperatura ambiente; o sea, la temperatura del medio que rodea al objeto.

Resuelva los siguientes problemas:

1. Un termómetro se saca de una habitación con temperatura de 70^oC, al exterior, donde la temperatura ambiente es de 10^oC después de $0,5min$ el termómetro marca 50^oC. ¿Cuánto marca el termómetro en $t = 1min$?, ¿Cuánto tiempo transcurre cuándo el termómetro marca 50^oC?.

2. Un tanque contiene $500lt$ de agua en la cual se disuelven $60gr$ de sal. Una salmuera que contiene tres gramos de sal por litro se bombea al tanque con una rapidez de $4lt/min$; la solución debidamente mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. ¿Cuántos gramos de sal hay en el tanque después de media hora?.

3. Se bombea cerveza con un contenido de 6% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 400 galones de cerveza con 3% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior con una rapidez de $3gal/min$, y el liquido mezclado se extrae con con la misma rapidez. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de $60min$?

4. La cantidad de bacterias en un cultivo crece con una rapidez proporcional a la cantidad de bacterias que hay en el mismo instante. Su población inicial es de 500 y aumenta en un 15% en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?.

5. Unos biólogos abastecieron un lago con 400 peces y estimaron la capacidad de soporte (la población máxima para los peces de esa especie en ese lago) en 10 000. La cantidad de peces se triplicó en el primer año.

   a) Si se supone que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, encuentre una expresión para el tamaño de la población después de t años.

   b) ¿En cuánto tiempo la población se incrementa a 5 000?