CÁLCULO INTEGRAL

Taller sobre series, criterios de convergencia, representación en serie de potencias.

M. Martínez

1. Considere la sucesión $a_n = \dfrac{2^n}{2^n + 1}$.

   (a) ¿La sucesión es creciente, decreciente o ninguna de las dos?

   (b) ¿La sucesión es acotada superiormente? ¿Inferiormente?

2. Considere la sucesión definida así:

   $$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3 - a_n}$$

   converge y diga cuál es el límite.

   (a) Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión, es decir, a_1, a_2, a_3, a_4.

   (b) Use el teorema de convergencia monótona para ver que la sucesión converge.

3. Suponga que la n-ésima suma parcial de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $S_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+2)}$.

   Halle a_n y el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Una pequeña bola cae desde 4 metros de altura. Al rebotar, alcanza 3 metros de altura, vuelve a caer y cada vez que vuelve a subir lo hace hasta una altura que es 3/4 de la altura anterior. ¿Cual sería la distancia total recorrida por la bola si siguiera rebotando para siempre? Asuma que el rebote es siempre totalmente vertical.

5. Escriba el número 0,31313131... como una serie geométrica y luego escríbalo como una fracción.

6. Decida si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$ converge o diverge.

7. Encuentre todos los valores de x para los cuales las siguientes series convergen. Para las tres últimas, diga cuál es el radio e intervalo de convergencia.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{\ln n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x+5)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n (2n)!}$

8. Decida si cada una de las siguientes series converge absolutamente, condicionalmente, o diverge. Diga cuál o cuáles criterios de convergencia usó y porqué los puede usar.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{20 \cdot 3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n!)^2 + cos^2 n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n-2}{\sqrt[3]{8n^6+5n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5\sqrt{n} - \ln(n)}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\ \ln(n)}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

9. Halle las sumas siguientes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$ (b) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 9\sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 27\sqrt{3}} + \dots$

10. Encuentre representaciones en serie para cada una de las funciones siguientes. Diga en qué intervalo es válida su representación.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+5x^2}$ (b) $g(x) = \displaystyle\int x\, tan^{-1}(2x)\, dx$ (c) $h(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$