

Cálculo Diferencial - Taller No. 3

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

(i) $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

(ii) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $[-4, 4]$

(iii) $f(x) = xe^{-x}$, $[-1, 4]$

(iv) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

(v) $f(x) = 2 \cos t + \sin(2t)$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

2. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$.

3. Para las funciones dadas, halle los números reales x en los cuales la función presenta un máximo local, o, un mínimo local, o, un punto de inflexión.

(i) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

(ii) $f(x) = x + \cos x$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

4. Bosquejar la gráfica de una función f que tenga todas las siguientes características:

(i) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

(ii) $f(0) = -1$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

(iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

(v) $f'(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (1, \infty)$ y $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$

(vi) $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f''(x) > 0$ en $(1, \infty)$

5. Halle el valor de los siguientes límites.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1 + x)}{x^3}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{\ln x} - \frac{3}{x - 1} \right)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}$

(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

(vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

6. ¿Para cuáles valores de los números a y b la función $f(x) = axe^{bx^2}$ tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

7. Haga un análisis detallado de las siguientes funciones. (Dominio, cortes con los ejes coordenados, simetrías, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos donde es concava hacia arriba e intervalos donde es concava hacia abajo, puntos de inflexión, gráfica y rango.)

(i) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

(ii) $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{1 + x^2}$

(iii) $f(x) = xe^{1/x}$

(iv) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

8. Un fabricante de empaques va a construir una caja cerrada con un volumen de 288 cm^3 . La base será un rectángulo con una longitud tres veces mayor que su anchura. Determine cuáles son las dimensiones de la caja de este tipo que requiere la menor cantidad de material.

9. Encuentre el área máxima de un rectángulo que tiene su base sobre el eje x y sus otros dos vértices sobre el semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$.

10. Encuentre el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 3.

11. Se quiere construir un triángulo rectángulo, situado en el primer cuadrante, que esté limitado por el eje x , por el eje y y por una recta que pasa por el punto $(1, 2)$. Si se quiere que el triángulo tenga la menor área posible, ¿cuáles deben ser sus vértices?