MATE 1203-C

Semestre 01-2025

Tercer Parcial

Nombres y apellidos:

Número de carné:

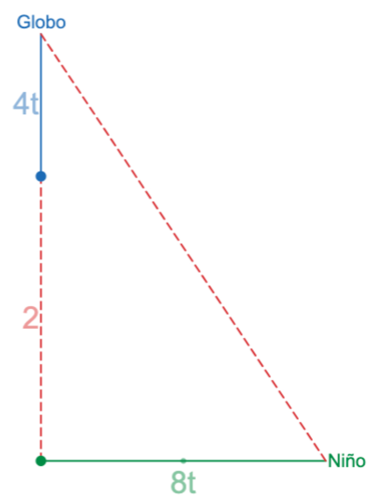

Figura 1: Figura para el problema 1

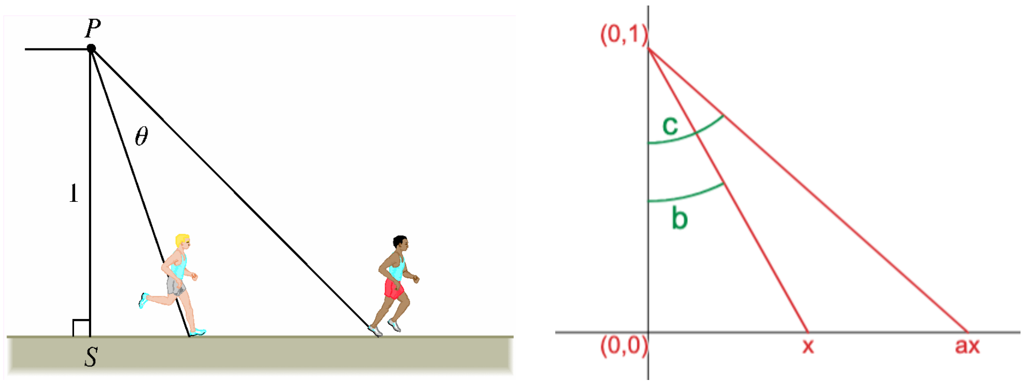

Figura 2: Figura para el problema 3

Hechos útiles:

- $\frac{d}{dz}\arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}$.
- Si f es integrable en $[a, b]$ y si $a \leq c \leq b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- (Teorema del valor medio) si f es contínua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), existe $a < c < b$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a).$$

Puntajes

	1	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	Total
Puntaje obtenido													
Máximo posible	8	4	5	3	4	3	5	4	3	4	3	4	50

Instrucciones: Cuatro (4) problemas en total. *Justifique debidamente los argumentos que dan lugar a sus respuestas. Lo obtenido en los problemas 1 y 2.2 se comparará con lo obtenido respectivamente en los problemas 5 y 2.3 del parcial 2, para asignar el puntaje más alto en cada caso al calificar. Puntajes de cada problema en página anterior.*

1. Un globo se eleva a una velocidad constante de 4 m/s. Un niño conduce su bicicleta, a lo largo de una vía recta, a una velocidad constante de 8 m/s. Se conoce que, en el instante en que la bicicleta pasa por debajo del globo, este último se encuentra 2 m por encima de la bicicleta: la situación después de t unidades de tiempo se ilustra en la figura 1 (el niño se mueve de izquierda a derecha). ¿Qué tan rápido incrementa la distancia entre la bicicleta y el globo 2 segundos después de que la bicicleta pasa por debajo del globo?

2. Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin(x^2 - x)}$$

   2.1 Muestre que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

   2.2 Muestre que si se define $f(0) = 0$, entonces

$$f'(0) = -1.$$

   (**Sugerencia:** en ambos numerales es permisible considerar la regla de L'Hospital; para 2.2 usar la definición de la derivada como límite)

3. Considere la figura 2, la cual representa dos corredores que salen en línea recta del mismo punto S: el de la izquierda a una velocidad de 1 unidad de distancia por unidad de tiempo; el de la derecha, mas veloz, a a unidades de distancia por unidad de tiempo (con $a > 1$ constante), de manera que cuando el corredor de la izquierda ha recorrido x unidades el de la derecha ha recorrido ax unidades. El punto P se encuentra a una unidad de altura sobre S, y en él se sitúa un observador que ve a los corredores con un ángulo θ subtendido entre ambos. El esquema de la derecha en la figura 2 representa esta situación en los ejes coordenados así como los ángulos b y c entre la vertical y cada corredor, vistos desde $P = (0, 1)$:

   3.1 Muestre que, cuando el corredor de la izquierda ha recorrido x unidades, el ángulo θ está dado por

$$\theta(x) = \arctan(ax) - \arctan(x); \qquad x \geq 0 \tag{1}$$

   (**Sugerencia:** $\theta = c - b$; considere a las funciones $\tan(b)$, $\tan(c)$).

3.2 Muestre (puede dar por sentado (1)) que

$$\theta'(x) = (a-1)\frac{(1-ax^2)}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}. \tag{2}$$

3.3 Muestre (puede dar por sentado (2)) que

$$x^* = 1/\sqrt{a} \tag{3}$$

es el único punto crítico de $\theta(x)$.

3.4 Muestre que $\theta(x)$ alcanza su **valor máximo** en el punto crítico x^* en (3) (**sugerencia:** considere el criterio de la primera derivada; puede dar por sentado (2)), y escriba dicho valor (este depende de a).

4. Sea

$$f(x) = 4 - |2x-3|\,.$$

4.1 Muestre que f se deja escribir a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} -2x+7, & x \geq 3/2 \\ 2x+1, & x < 3/2. \end{cases} \tag{4}$$

4.2 Muestre (puede dar por sentado (4)) que f es contínua en $x = 3/2$.

4.3 De acuerdo a (4), la función derivada de f es

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x > 3/2 \\ 2, & x < 3/2. \end{cases} \tag{5}$$

Usar (5) para verificar que **la conclusión** del teorema del valor medio **no** se satisface en el intervalo $[0,3]$.

4.4 ¿Cuál de **las hipótesis** del teorema del valor medio no se satisface para f en el intervalo $[0,3]$?

4.5 Calcule (puede dar por sentado (4)), usando el teorema fundamental del cálculo, la integral

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

Nombres y apellidos:

Solución al problema 1

Solución al problema 2

Nombres y apellidos:

Solución al problema 3

Nombres y apellidos:

Solución al problema 4

Nombres y apellidos:

Espacio extra: