Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes[1]
Parcial 3 Calculo Diferencial. – MATE-1203

Nombre:__________________________________ Código: __________________

Marque esta hoja y devuélvala junto con sus respuestas. Muestre todo su trabajo y justifique todas tus respuestas.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	15	10	15	10	50
Score:					

1. (15 puntos) Se desea construir una caja donde la longitud de la base es tres veces el ancho de la base. El material usado para fabricar la base y la tapa es de \$ 10 por metro cuadrado y él material para fabricar las caras laterales es de \$ 6 por metro cuadrado. Si la caja tiene un volumen de 50 metros cúbicos, hallar las dimensiones de la caja que minimiza el costo de fabricación.

   Solución.

   Denotemos por y la longitud de la base de la caja, por x el ancho de la base de la caja y por h la altura de la caja, entonces tenemos las siguientes restricciones.

$$y = 3x,$$
$$3x^2 h = 50.$$

   De otro lado el costo de fabricación de la base y la tapa es de $A(x) = 60x^2$ mientras que el costo de fabricación de las caras laterales es $B(x,h) = 48xh$, por lo que el costo total $C(x,h) = 60x^2 + 48xh$, ahora de la segunda restricción se tiene que $h = \dfrac{50}{3x^2}$, por lo que al remplazar esto en la función costo total se tiene que

$$C(x) = 60x^2 + 48x\frac{50}{3x^2}$$
$$C(x) = 60x^2 + \frac{800}{x},$$

   por último antes de derivar notemos que la función $C(x)$ es continua y difrenciable en su dominio y que $Dom(C) = (0, \infty)$. Ahora si pasamos a calcular los puntos críticos de C, para esto

$$0 = C'(x) = 120x - \frac{800}{x^2} \qquad \Longrightarrow$$
$$x^3 = \frac{800}{120} = \frac{20}{3} \qquad \Longrightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{20}{3}}.$$

[1] El juramento del uniandino dice: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”

Ahora notamos que

$$C''(x) = 120 + \frac{1600}{x^3}$$
$$C''\left(\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\right) = 120 + 240 = 360 > 0,$$

por lo tanto $x = \sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ es un mínimo global de la función (No hay más puntos críticos). Se concluye que las dimensiones de la caja

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{20}{3}}, \\ y &= 3\sqrt[3]{\frac{20}{3}} = \sqrt[3]{180}, \\ h &= \frac{50}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{20}} = \sqrt[3]{\frac{6250}{9}}. \end{aligned}$$

2. (10 puntos) Demostrar que para todo $x \geq 0$ se tiene que

$$2arcsin(x) = arccos\left(1 - 2x^2\right).$$

<u>Solución.</u>

Denotenos por $f(x) = 2arcsin(x)$ y por $g(x) = arccos(1 - 2x)$, entonces notemos que

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}},$$

mientras que

$$g'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1 - (1 - 2x^2)^2}} = \frac{4x}{2x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

De lo anterio se tiene que $f'(x) = g'(x)$, por lo que $f(x) = g(x) + K$ donde K es una constante, notemos que

$$\begin{aligned} f(0) &= 2arcsin(0) = 0 \\ &= g(0) + K = arccos(1) + K = 0 + K, \end{aligned}$$

por lo tanto $K = 0$ y se tiene que $f(x) = g(x)$.

3. (15 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{ln(x)}{x^2}$

   a) (5 pts) Hallar los puntos críticos de $f(x)$ y clasificarlos en máximos locales, mínimos locales o puntos de inflexión.

   b) (5 pts) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

c) (5 pts) Hallar los intervalos en los que $f(x)$ es concava hacia arriba y los intervalos en los que es concava hacai abajo.

Solución.

a) Para calcular los puntos críticos de $f(x)$ calculamos

$$f'(x) = \frac{1 - 2ln(x)}{x^3} = 0,$$

lo anterior sucede solo si $x = \sqrt{e}$. Este es el único punto crítico ya que $x = 0 \notin Dom(f)$. Para poder clasificar este punto crítico tenemos que computar

$$f''(x) = \frac{6ln(x) - 5}{x^4},$$
$$f''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3-5}{e^2} = -\frac{2}{e^3} < 0,$$

por lo que el punto crítico es un máximo local.

b) Notemos que $dom(f) = (0, \infty)$, por lo tanto $f'(x) > 0$ si y solo si $1 - 2ln(x) > 0$, es decir si $\frac{1}{2} > ln(x)$. Concluimos que f es creciente en el intervalo $(0, \sqrt{e})$, por el contrario f es decreciente en el intervalo $(\sqrt{e}, \infty)$.

c) La función f es concava hacia arriba si $f''(x) > 0$, esto sucede si y solo si $6ln(x) - 5 > 0$, es decir si $x > e^{5/6}$. Se concluye que f es concava hacia arriba en $\left(e^{5/6}, \infty\right)$ mientras que es concava hacia abajo en $\left(0, e^{5/6}\right)$.

4. (10 puntos) Hallar el valor de los siguientes límites.

a) (5 pts)

$$Lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$$

b) (5 pts)

$$Lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

Solución.

a)

$$\begin{aligned} Lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x &= Lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x\right) \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)} \\ &= Lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = Lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Sea $L = Lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$, entonces

$$\begin{aligned} ln(L) &= Lim_{x\to\infty} x ln\left(1-\frac{2}{x}\right) = Lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= Lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = Lim_{x\to\infty} - \frac{2x}{x-2} = -2. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $L = e^{-2}$.