**Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes**[1]
**Parcial 2 Calculo Diferencial. – MATE-1203**

Nombre:____________________________________ Código: __________________

Marque esta hoja y devuélvala junto con sus respuestas. Muestre todo su trabajo y justifique todas tus respuestas.

| Question: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Points: | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 50 |
| Score: | | | | | | |

1. (10 puntos) Calcular $f'(x)$ para las siguientes funciones.

   a)
   $$f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}.$$

   b)
   $$f(x) = sen\left(arctan(\sqrt{x-1})\right).$$

   Solución.

   a)
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1-\sqrt[4]{x}) - (x+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{4x^{3/4}}\right)}{(1-\sqrt[4]{x})^2} \\ &= \frac{2 - x^{1/4} + 4x^{1/2} - 3x^{3/4}}{4x^{1/2}(1-\sqrt[4]{x})^2} \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} f'(x) &= cos\left(arctan\left(\sqrt{x-1}\right)\right)\frac{1}{1+(x-1)}\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}cos\left(arctan\left(\sqrt{x-1}\right)\right). \end{aligned}$$

2. (10 puntos) Un contenedor tiene la forma de un cono hueco con un ángulo semi-vertical de $\pi/6$ y su vértice apunta hacia abajo. Si agua es vertida en el cono a una razón de $5cm^3/s$, encuentre la razón a la cual la profundidad del agua en el cono está incrementando cuando su profundidad es $10cm$.

   Solución.

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

Denotemos por $h$ la profundida del agua en el tanque par un tiempo $t$ fijo y sea $r$ el radio del disco formado por la parte superior del agua en el mismo instante, por la relación dada en el enunciado tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{r}{h} \implies$$
$$r = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Ya que conecemos el volumen de un cono se tiene que

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h = \frac{\pi}{9}h^3 && \implies \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{3}h^2\frac{dh}{dt} && \implies \\
\frac{dh}{dt} &= \frac{3}{\pi}\frac{\frac{dV}{dt}}{h^2} && \implies \\
\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=10cm} &= \frac{3}{\pi}\frac{5cm^3/s}{100cm^2} = \frac{3}{20\pi}cm/s.
\end{aligned}$$

3. (10 puntos) Dada la curva

$$y = e^{tan^2(x)},$$

hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(\pi/4, e)$.

Solución.

Lo primero a calcular es

$$y'(x) = 2tan(x)sec^2(x)e^{tan^2(x)},$$
$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4e,$$

Ahora usamos la ecuación punto pendiente y obtenemos que la recta tangente a la curva en el punto dado es

$$y = 4e\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e.$$

4. (10 puntos) Hallar $f'(x)$ para la función

$$f(x) = x^{(\sqrt{x}+2)}.$$

Solución.

Denotemos por $f(x) = y$, nos guastaría aplica derivación logaritmica, es decir

$$\begin{aligned}
y &= x^{\sqrt{x}+2} \implies \\
ln(y) &= \left(\sqrt[x]{+}2\right) ln(x), \implies \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}ln(x) + \frac{\sqrt{x}+2}{x} = \frac{\sqrt{x}ln(x) + 2\sqrt{x} + 4}{2x} \implies \\
y' &= x^{\sqrt{x}+2}\left(\frac{\sqrt{x}ln(x) + 2\sqrt{x} + 4}{2x}\right).
\end{aligned}$$

5. (10 puntos) Dada la curva

$$y^2 = x^3 - 12x,$$

a) Hallar todos los puntos sobre la curva dada cuya recta tangente sea horizontal.

b) Hallar todos los puntos sobre la curva dada cuya recta tangente sea vertical.

<u>Solución.</u>

Por diferenciación implicita se tien que

$$2yy' = 3x^2 - 12 \implies$$
$$y' = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2-4}{y}\right).$$

a) Para que se den tangente horizontales se necesita que $y' = 0$, esto sucede si $x^2 - 4 = 0$ lo cual sucede si $x = \pm 2$, notemos que si $x = 2$ se tiene que $y^2 = -16$ lo cual es imposible, mientras que si $x = -2$ se tien que $y^2 = 16$ o de forma equivalente $y = \pm 4$ es decir que los punto buscados son $(-2, -4)$ y$(-2, 4)$.

b) Finalmente para que que se tenga pendiente vertical necesitamos que $y' = \pm\infty$, lo anterior se da si $y = 0$, por lo que $0 = x^3 - 12x = x(x^2 - 12)$. Es decir que $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{12}$. Por lo que los puntos buscados son $(0, 0), (-\sqrt{12}, 0)$ y $(\sqrt{12}, 0)$.