Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes[1]
Parcial 1 Calculo Diferencial – MATE-1203

Nombre:____________________________________ Código: ____________________

Marque esta hoja y devuélvala junto con sus respuestas. Muestre todo su trabajo y justifique todas tus respuestas.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	15	15	10	50
Score:					

1. (10 puntos) Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

es continua en todo los reales.

Solución.

Los únicos puntos en los que la función f puede llegar a ser discontinu es en $x = -2$ y en $x = 0$. Para que lo anterior no suceda se necesi ta que se satisfagan las siguientes igualdades.

$$Lim_{x\to-2^-} f(x) = Lim_{x\to-2^+}(f)$$
$$Lim_{x\to-2} ax + 2b = Lim_{x\to-2} x^2 + 2x + 2$$
$$2b - 2a = 2. \text{ y}$$
$$Lim_{x\to0^-} f(x) = Lim_{x\to0^+} f(x)$$
$$Lim_{x\to0} x^2 + 2x + 2 + Lim_{x\to0} ax + b$$
$$2 = b.$$

De lo anterior se deduce que $b = 2$ y $a = 1$.

2. (15 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{ln(x)}{-3 - 2ln(x)},$$

a) (5pt])Hallar $Dom(f)$.
b) (5pt) Hallar una expresión para $f^{-1}(x)$.
c) (5pt) Hallar $Im(f)$.

Solución.

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

a) Notar que $X > 0$ para poder evaluar en $ln(x)$, y por otro lado $-3 - 2ln(x) \neq 0$ por lo que $x \neq e^{-3/2}$, por lo tanto

$$Dom(f) = (0, e^{-3/2}) \cup (e^{-3/2}, \infty).$$

b) Aplicamos el algoritmo visto en clase, de donde se tien que

$$\begin{aligned} x = \frac{ln(y)}{-3 - 2ln(y)} &\implies (-3 - 2ln(y))x = ln(y) \\ &\implies -3x = ln(y)\,(2x+1) \\ &\implies ln(y) = \frac{-3x}{2x+1} \\ &\implies f^{-1}(x) = y = e^{-\frac{3x}{2x+1}}. \end{aligned}$$

c) Finalmente notemos que

$$Im(f) = Dom(f^{-1}) = (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, \infty).$$

3. (15 puntos) Calcule los siguientes limites, si existen. Si no existen, justifique por qué.

a) (5pt)

$$Lim_{x \to\ -1}\ cos\left(\frac{\pi(x^3+1)}{x+1}\right).$$

b) (5pt)

$$Lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}.$$

c) (5pt)

$$Lim_{x\to 1}h(x),$$

donde $h(x)$ tiene la siguiente expresión

$$h(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } \ x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } \ 1 < x \end{cases}$$

<u>Solución.</u>

a)

$$Lim_{x\to\ -1}\ cos\left(\frac{\pi(x^3+1)}{x+1}\right) = cos\left(\pi Lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}\right) = cos\left(\pi Lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\right)$$

$cos\left(\pi Lim_{x\to -1}(x^2-x+1)\right) = cos(3\pi) = -1.$

b)

$$Lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1} = Lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = Lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}.$$

c) Notemos que $lim_{x\to 1^-}h(x) = Lim_{x\to 1}\,|x-2| = 1$, mientras que $Lim_{x\to 1^+}h(x) = Lim_{x\to 1}e^{x-1} = e^0 = 1$, por lo que $Lim_{x\to 1}h(x) = 1$.

4. (10 puntos) Hallar, en caso de existir las asintotas horizontales y verticales de la curva

$$y = \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2}$$

<u>Solución.</u>
Notemos que

$$Lim_{x \to ln(1/2)^-} \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2} = \infty,$$
$$Lim_{x \to ln(1/2)^+} \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2} = -\infty$$

Por lo que se tiene una asintota vertical en $x = ln(1/2)$. De otro lado

$$Lim_{x \to \infty} \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2} = 0,$$
$$Lim_{x \to infty} \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2} = 2,$$

por lo que hay dos asintotas horizontales en $y = 0$ y en $y = 2$.