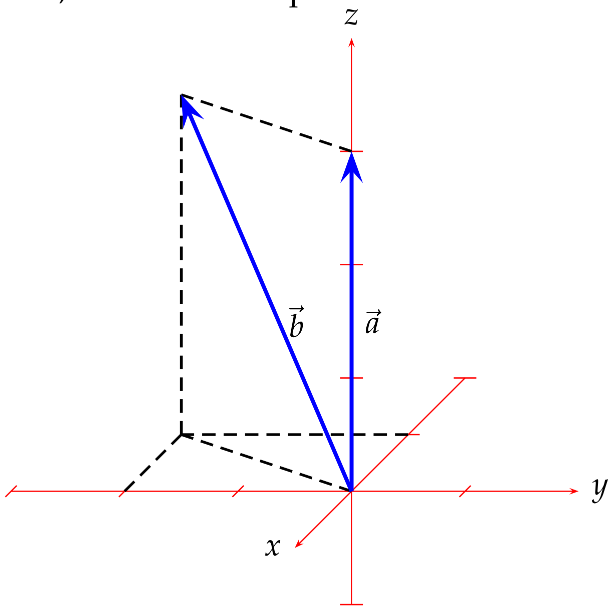
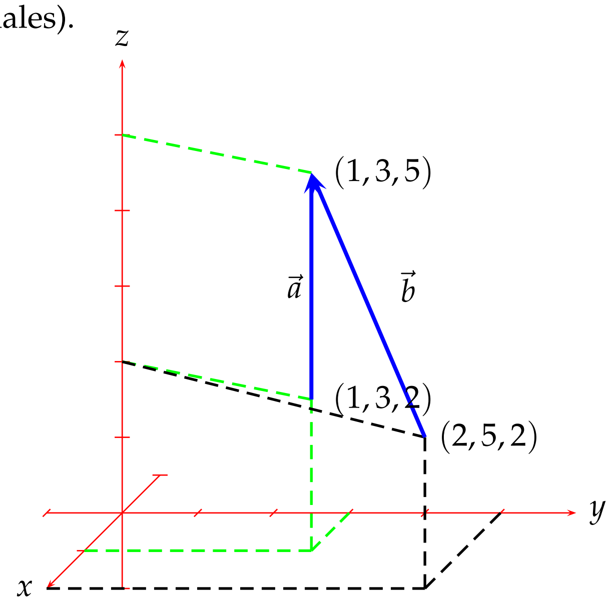
Taller 1 - Algebra Lineal — (09/02/2011)

1. Considere los vectores en $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} = [0, 0, 3]$y $\vec{b} = [-1, -2, 3]$.

   a) Dibujar en $\mathbb{R}^3$, los vectores en posición estandar.

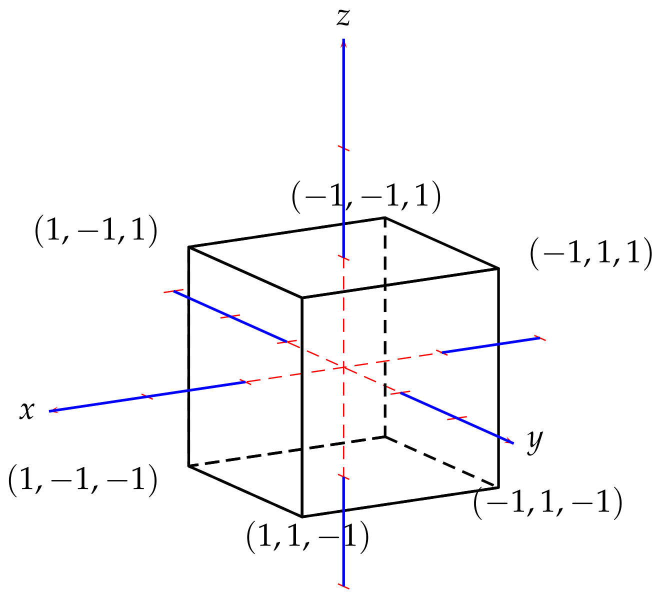


   b) Si los vectores son trasladados de manera que sus cabezas(puntos terminales) estan en el punto $(1, 3, 5)$, encontrar los puntos correspondientes a sus colas(puntos iniciales).



2. Construir un cubo de lado 2 con centro en el origen.

   a) Encontrar las coordenadas de 8 vértices.



b) Calcular el ángulo entre 2 caras adyacentes del cubo.
Respuesta: $\theta = \frac{\pi}{2}$

c) Calcular la longitud de la diagonal del cubo que va desde un vértice hasta el vértice opuesto.
Respuesta: $2\sqrt{3}$

d) Calcular el producto punto entre los vectores encontrados en el inciso b).
Respuesta: 0

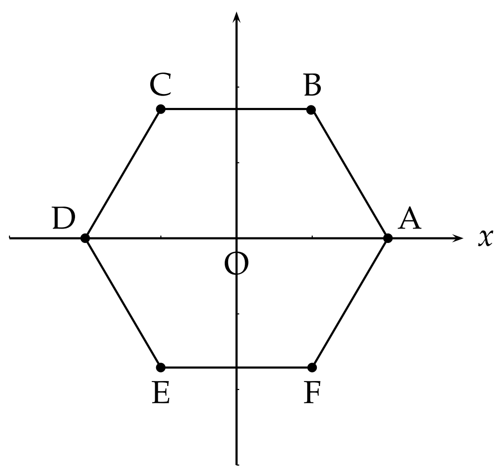
3. En la figura A, B, C, D, E, F, son los vértices de un hexágono regular centrado en el origen. Expresar cada uno de los siguientes vectores en términos de los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.
Respuesta:

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

b) $\overrightarrow{BC} = -\vec{a}$

c) $\overrightarrow{AD} = -2\vec{a}$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA} = \vec{a}$



4. Sean los vectores $\vec{u} = 9\vec{i} + 12\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} + 4\vec{j}$. Determine el escalar α tal que:

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.
Respuesta: $\alpha = 3$.

b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.
Respuesta: $\alpha = \frac{-16}{3}$.

c) El ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{6}$.
Respuesta: Despejar α de la ecuaciòn $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\alpha + 16}{15\sqrt{\alpha^2 + 16}}$

5. Para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, probar que:

a) Los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales, si y solo si, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
Prueba: $(u+v)(u-v) = \|u\|^2 - \|v\|^2$. Los vectores serán ortogonales si y sólo si $\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ si y sòlo si $\|u\| = \|v\|$.

b) Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, entonces $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$.
Prueba: $\|u+v\|^2 = (u+v)(u+v) = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 = 9$. Entonces $\|u+v\| = 3$.

c) Si el vector $\vec{u}$ es ortogonal tanto al vector $\vec{v}$ como al vector $\vec{w}$, entonces, el vector $\vec{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal de estos, es decir, $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $s\vec{v} + t\vec{w}$.
Prueba: $u(su + tw) = su \cdot v + tu \cdot w = s0 + t0 = 0$.

6. *a*) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Muestre que $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Respuesta: Compruebe que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_3$.

b) Encuentre la solución del sistema lineal:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \\ -y + z = 8. \end{cases}$$
Respuesta: El sistema es equivalente al sistema matricial $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es la matriz del inciso *a*), $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$, entonces al despejar el vector $\vec{x}$ de tal ecuación vectorial se tiene que $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Por lo tanto $x = 53/8$,
$y = -65/8$, $z = -1/3$.

c) Halle la solución del sistema homogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$. **Ayuda:** No hay que trabajar más.
Respuesta: Como A es invertible, el sistema solo admite la solución trivial, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

d) ¿Esta el vector $[5, 3, 8]$ en el espacio generado por los vectores $[2, 3, 0]$, $[1, 2, -1]$ y $[1, 5, 1]$? **Ayuda:** De los incisos *a*) y *b*) la respuesta es inmediata.
Respuesta: Si, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{53}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{65}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (Ver inciso *a*)).

7. Considere el siguiente sistema lineal:
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -4x - 2y + 2z = -2 \end{cases}.$$

   a) Escriba las soluciones del sistema en la forma $\vec{x} = p + h$, donde $\vec{p}$ es una solución particular del sistema no homogeneo y $\vec{h}$ es la solución general del sistema homogeneo.
   Respuesta:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t}_{\vec{h}}, \ s \text{ y } t \text{ escalares.}$$

   b) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre una base para el espacio nulo de la matriz A. **Ayuda:** Ver inciso *a*).
   Respuesta: $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Ó también $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

   c) Decida si el vector $[1, 1, 3]$ está en el espacio nulo de la matriz A(Justifique su respuesta). **Ayuda:** Ver inciso *a*).
   Respuesta: Sí esta, pues, éste vector satisface la ecuación $A\vec{x} = 0$.

   d) Halle una base para gen$\{[2, -4], [1, -2], [-1, 2]\}$. **Ayuda:** Ver inciso *b*).
   Respuesta: Del numeral 7*a*) se observa que la matriz reducida sólo tiene un pivote en la primer columna, por lo tanto solo tiene un vector en la base de esas columnas, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

   e) Halle una base para el espacio columnas de A.
   Ayuda: Ver inciso *d*).

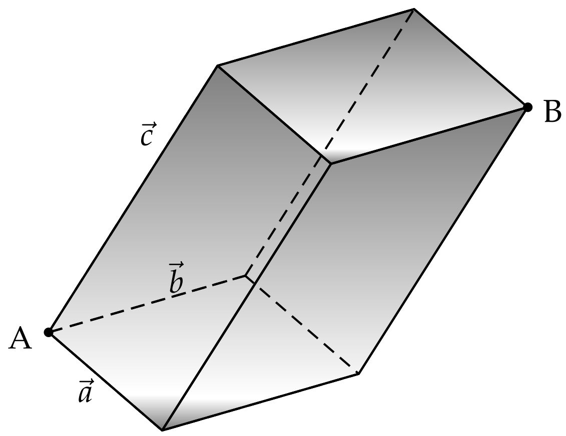
8. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Encontrar una matriz reducida por renglones y equivalente a la matriz A.
   Respuesta: $A \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) Encontrar todas las soluciones del sistema $A\vec{X} = 0$, $A\vec{X} = \vec{X}$ y $A\vec{X} = 2\vec{X}$.
   Respuestas: El conjunto solución del sistema $A\vec{x} = 0$ es:
   $\{[-4/5t, -2/5t, t],\ t \in \mathbb{R}\}$=Span$\{[4, 2, -5]\}$.
   Para resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{x}$, procedemos así: El sistema $A\vec{x} = \vec{x}$ es equivalente al sistema $(A - \mathbb{I})\vec{x} = 0$, es decir, el espacio nulo de la matriz $A - \mathbb{I}$, pero ésta es invertible, luego solo admite la solución $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
   De igual manera la única solución del sistema $A\vec{x} = 2\vec{x}$, es la trivial. El conjunto solución del sistema $A\vec{x} = \vec{x}$ es:
   $\{[-4/5t, -2/5t, t],\ t \in \mathbb{R}\}$=Span$\{[4, 2, -5]\}$.

c) Encontrar todos los valores del parámetro k para los cuales existe un vector $\vec{X}$ tal que $A\vec{X} = k\vec{X}$.
Respuesta: $x = \frac{3(k^2-3k-4)}{k^3-3k^2-4k-12}$, $y = \frac{6(k-1)}{k^3-3k^2-4k-12}$, $z = \frac{3(k+5)}{k^3-3k^2-4k-12}$.

9. Construcción de un paralelepipedo (poliedro de seis caras, en el que sus caras son paralelogramos y paralelas e iguales dos a dos) generado por tres vectores $\vec{a} = [2,5,0]$, $\vec{b} = [-5,4,0]$, y $\vec{c} = [1,3,8]$. Y con vértices opuestos en los puntos $A(1,1,0)$ y $B(-1,13,8)$. Ver figura.



a) haga un buen dibujo del paralelepipedo.

b) Encuentre las coordenadas de los seis vértices restantes del paralelepipedo.
Respuesta: $(3,6,0), (-2,10,0), (-4,5,0), (2,4,8), (4,9,8), (-3,8,8)$.

c) Halle el punto medio del segmento que une los vértices A y B del paralelepipedo.
Respuesta: $(0,7,4)$.

d) Halle el punto medio de la cara superior del paralelepipedo.
Respuesta: $(1/2, 17/2, 8)$.

e) Encuentre el espacio generado por el vector $\vec{a}$. Haga un dibujo.
Respuesta: $\text{Span}\{\vec{a}\} = \{t[2,5,0] \colon t \in \mathbb{R}\}$. Una recta en el espacio $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Observe que si el punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ esta sobre la recta, se debe tener que $[x,y,z] = t[2,5,0]$, es decir, $x = 2t$, $y = 5t$ y $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

f) Encuentre el espacio generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Haga un dibujo.
Respuesta: $$\text{Span}\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ [x,y,z] = r[2,5,0] + s[-5,4,0] \colon r,s \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\right\} = \mathbb{R}^2.$$

10. Decida si los siguientes conjuntos (H) son subespacios del espacio dado (V). En caso de ser un subespacio construya una base.

a) $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\right\}$, $V = \mathbb{R}^2$.
Respuesta: (H no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$). Por ejemplo los vectores $[1,0]$ y $[0,1]$ estan en H, sin embargo $[1,0] + [0,1] = [1,1] \notin H$.

b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\}, \ V = \mathbb{R}^3$.
Respuesta: (H no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$). Por ejemplo los vectores $[-2, -2, 1]$ y $[1, 3, 1]$ estan en H, sin embargo $[-2, -2, 1] + [1, 3, 1] = [-1, 1, 2] \notin H$.

c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 5, \ 3x + 2y + 5z = 3\}, \ \ V = \mathbb{R}^3$.
Respuesta: (H no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$). El origen $(0, 0, 0) \notin H$.

d) $H = \{(1 - x, 0, 0, x) \in \mathbb{R}^4 : \ x \in \mathbb{R}\}, \ \ V = \mathbb{R}^4$.
Respuesta: (H no es un subespacio de $\mathbb{R}^4$). El origen $(0, 0, 0, 0) \notin H$.

e) $H = \{(a, b, a + b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}, \ V = \mathbb{R}^3$.
Respuesta: (H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$). Una base para H es $B = \{[1, 0, 1], [0, 1, 1]\}$.