Taller 1 - Algebra Lineal — (09/02/2011)

---

1. Considere los vectores en $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} = [0,0,3]$y $\vec{b} = [-1,-2,3]$.

   a) Dibujar en $\mathbb{R}^3$, los vectores en posición estandar.

   b) Si los vectores son trasladados de manera que sus cabezas(puntos terminales) estan en el punto $(1,3,5)$, encontrar los puntos correspondientes a sus colas(puntos iniciales).

2. Construir un cubo de lado 2 con centro en el origen.

   a) Encontrar las coordenadas de 8 vértices.

   b) Calcular el ángulo entre 2 caras adyacentes del cubo.

   c) Calcular la longitud de la diagonal del cubo que va desde un vértice hasta el vértice opuesto.

   d) Calcular el producto punto entre los vectores encontrados en el inciso *b*).

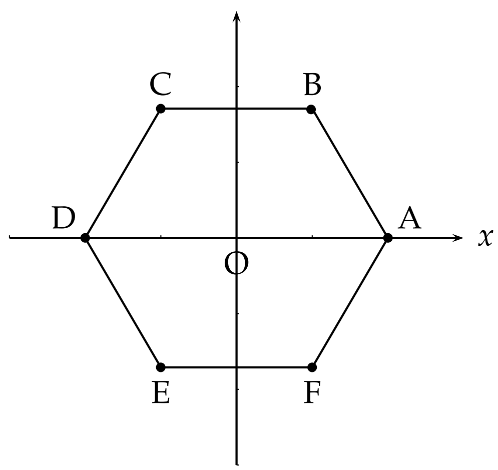
3. En la figura A, B, C, D, E, F, son los vértices de un hexágono regular centrado en el origen. Expresar cada uno de los siguientes vectores en términos de los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

   a) $\overrightarrow{AB}$.

   b) $\overrightarrow{BC}$.

   c) $\overrightarrow{AD}$.

   d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$.



4. Sean los vectores $\vec{u} = 9\vec{i} + 12\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} + 4\vec{j}$. Determine el escalar α tal que:

   a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

c) El ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{6}$.

5. Para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, probar que:

   a) Los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales, si y solo si, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

   b) Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$, entonces $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 6$.

   c) Si el vector $\vec{u}$ es ortogonal tanto al vector $\vec{v}$ como al vector $\vec{w}$, entonces, el vector $\vec{u}$ es ortogonal a cualquir combinación lineal de estos, es decir, $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $s\vec{v}+t\vec{w}$.

6. *a*) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Muestre que $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) Encuentre la solución del sistema lineal:
   $$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \\ -y + z = 8. \end{cases}$$

   c) Halle la solución del sistema homogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$. **Ayuda:** No hay que trabajar más.

   d) ¿Esta el vector $[5,3,8]$ en el espacio generado por los vectores $[2,3,0]$, $[1,2,-1]$ y $[1,5,1]$? **Ayuda:** De los incisos *a*) y *b*) la respuesta es inmediata.

7. Considere el siguiente sistema lineal:
   $$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -4x - 2y + 2z = -2 \end{cases}.$$

   a) Escriba las soluciones del sistema en la forma $\vec{x} = p + h$, donde $\vec{p}$ es una solución particular del sistema no homogeneo y $\vec{h}$ es la solución general del sistema homogeneo.

   b) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre una base para el espacio nulo de la matriz A. **Ayuda:** Ver inciso *a*).

   c) Decida si el vector $[1,1,3]$ está en el espacio nulo de la matriz A(Justifique su respuesta). **Ayuda:** Ver inciso *a*).

   d) Halle una base para gen$\{[2,-4],[1,-2],[-1,2]\}$. **Ayuda:** Ver inciso *b*).

   e) Halle una base para el espacio columnas de A.
   Ayuda: Ver inciso *d*).

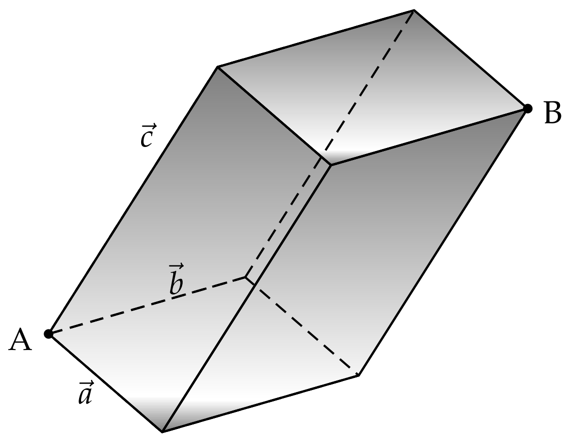
8. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Encontrar una matriz reducida por renglones y equivalente a la matriz A.

   b) Encontrar todas las soluciones del sistema $A\vec{X} = 0$, $A\vec{X} = \vec{X}$ y $A\vec{X} = 2\vec{X}$.

   c) Encontrar todos los valores del parámetro k para los cuales existe un vector $\vec{X}$ tal que $A\vec{X} = k\vec{X}$.

9. Construcción de un paralelepipedo (poliedro de seis caras, en el que sus caras son paralelogramos y paralelas e iguales dos a dos) generado por tres vectores $\vec{a} = [2, 5, 0]$, $\vec{b} = [-5, 4, 0]$, y $\vec{c} = [1, 3, 8]$. Y con vértices opuestos en los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(-1, 13, 8)$. Ver figura.



   a) haga un buen dibujo del paralelepipedo.

   b) Encuentre las coordenadas de los seis vértices restantes del paralelepipedo.

   c) Halle el punto medio del segmento que une los vértices A y B del paralelepipedo.

   d) Halle el punto medio de la cara superior del paralelepipedo.

   e) Encuentre el espacio generado por el vector $\vec{a}$. Haga un dibujo.

   f) Encuentre el espacio generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Haga un dibujo.

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\} = \mathbb{R}^2.$$

10. Decida si los siguientes conjuntos (H) son subespacios del espacio dado (V). En caso de ser un subespacio construya una base.

   a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

b) $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\right\},\ V = \mathbb{R}^3.$

c) $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 5,\ \ 3x + 2y + 5z = 3\right\},\ \ V = \mathbb{R}^3.$

d) $H = \left\{(1 - x, 0, 0, x) \in \mathbb{R}^4 :\ x \in \mathbb{R}\right\},\ \ V = \mathbb{R}^4.$

e) $H = \left\{(a, b, a + b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\right\},\ V = \mathbb{R}^3.$