

Prof: J. López

1. Realizar lo indicado.

a) Mostrar que el vector $\vec{v} = [2, 1, 2]$ es un vector propio de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ y encontrar el valor propio correspondiente.}$$

b) Encontrar los valores y vectores propios, primero geoméricamente y luego algebraicamente, de las matrices:

$$i) H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$ii) P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Dé al menos dos razones de por qué las matrices H y P dadas en la parte b) no pueden ser similares.d) Encuentre T^{10} si $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.2. a) Muestre que los valores propios de una matriz 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ donde, $\text{tr}(A)$ es la traza de A , es decir, $a + d$.b) Muestre que los valores propios de la matriz A en la parte a) son:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc} \right).$$

c) Mostrar que la traza y el determinante de la matriz A en la parte a) están dados por: $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$, donde, λ_1 y λ_2 son los valores propios de A .3. Halle todos los valores del parámetro k para los cuales la matriz $M = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 4 & k^2 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$ es invertible.4. Asuma que A y B son matrices $n \times n$ con $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -3$. Encuentre:i) $\det(AB)$. ii) $\det(2A)$. iii) $\det(A^T A)$. iv) $\det(A^{-1} B)$.5. Considere la matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.a) Encontrar todos los valores del parámetro k para los que la matriz S es diagonalizable.

- b) Para los valores de k encontrados en a) halle las matrices C invertible y D diagonal que diagonalizan a S .
- c) ¿La matriz S puede ser diagonalizada ortogonalmente? Justifique su respuesta.
6. Sea Q una matriz ortogonal. Muestre que:
- a) Q^{-1} es ortogonal.
- b) $\text{Det}(Q) = \pm 1$.
- c) Si λ es un valor propio de Q , entonces $|\lambda| = 1$.
7. a) Determine si el conjunto de vectores $B = \{[1, 1, 1], [1, -1, -1], [0, 1, -1]\}$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Si no lo es, construya una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de B .
- b) Diga si la matriz $Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ es ortogonal. Calcule Q^{-1} .
8. Sea $H = \{[x, y, z] : x = t, y = -t, z = 2t, t \in \mathbb{R}\}$.
- a) Haga un buen dibujo del espacio H y del espacio $H^\perp$, complemento ortogonal de H .
- b) Halle bases ortogonales para H y $H^\perp$.
- c) Escriba el vector $\vec{b} = [1, 1, 1]$ como la suma de un vector en H y otro en $H^\perp$, es decir, $\vec{b} = \vec{b}_H + \vec{b}_{H^\perp}$.
9. Identifique y grafique la cónica cuya ecuación es $xy = 1$. Identificando los nuevos ejes y el ángulo de rotación.
10. Sean $B = \{[0, 1], [1, 2]\}$ y $B' = \{[1, 0], [-1, 1]\}$ dos bases para el espacio $\mathbb{R}^2$. Encuentre $[x]_B'$ dado que $[x]_B = [1, 3]$.
11. Sean B y B' bases para $\mathbb{R}^2$. Si $B' = \{[1, 2], [2, 3]\}$ y la matriz de cambio de base de B a B' es $C_{B, B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, encontrar B .
12. Considere las bases ordenadas de P_2 , $B = \{x^2, x, 1\}$ y $B' = \{1, 1 - x, (1 - x)^2\}$.
- a) Halle la matriz de cambio de base $C_{B, B'}$.
- b) Sea $p(x) = 2 - x - 3x^2$. Halle $[p(x)]_{B'}$.
- c) Si $T : P_2 \rightarrow P_2$, definida por $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$.
- i) Muestre que T es lineal.
- ii) Halle la matriz de representación de T relativa a las bases B, B' .
- iii) Si $p(x) = 1 - 2x + x^2$, halle $T(p(x))$.