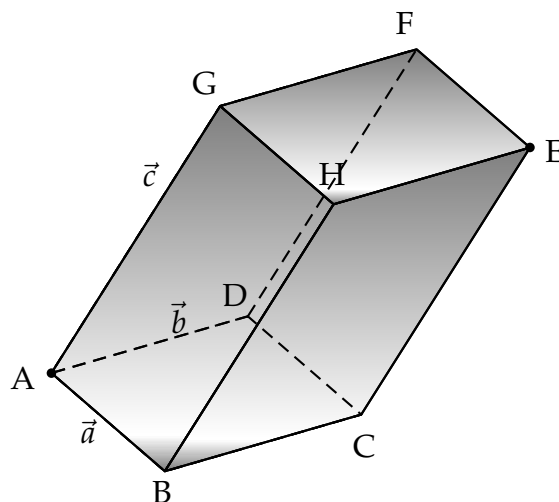


Prof: J. López

1. a) Construir un paralelepípedo S con vértices en los puntos A, B, C, D, E, F, G , y H si se conocen los siguientes vértices: $B(3, 4, 0)$, $C(-1, 4, 0)$, $D(-1, 1, 0)$ y $F(-2, 3, 6)$.



- b) Halle el punto medio P de la cara $EFGH$.
- c) Halle el área de la cara superior $EFGH$.
- d) Halle la ecuación de la recta L que pasa por los puntos C y P .
- e) Halle el punto R sobre la recta L que este más cerca del vértice E .
- f) Halle la ecuación del plano Π generado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AG}$.
- g) Halle el punto Q en el plano Π que está más cerca del vértice E .
- h) La recta L del inciso c) atraviesa al plano Π del inciso d)? Si es así, en qué punto lo hace?
- i) Halle la ecuación del conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ que son equidistantes de los vértices E y G .
2. Considere los planos: $\pi_1 : x - 2y + z = 0$, $\pi_2 : 2x + y - z = 0$ y $\pi_3 : 3x - y = 0$.
- a) Halle el conjunto de todos los puntos comunes a los tres planos. Dé una interpretación geométrica de dicho conjunto. Haga un buen dibujo en $\mathbb{R}^3$.
- b) Halle una base para el espacio columna y una base para el espacio nulo de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Cuál es el rango de la matriz A ?
- c) Considere la matriz A del numeral b) como la matriz de representación estándar de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Halle la imagen mediante esta transformación de la cara inferior del paralelepípedo del ejercicio 1.a).

- d) ¿Está el vector $[1, -3, 5]$ en la imagen de T ?
- e) Halle una base B para el kernel de T .
- f) ¿Está el vector $[3, -9, 15]$ en el kernel de T ?
- g) Escriba el vector de coordenadas del vector $[3, 9, 15]$ relativas a la base B del inciso anterior
3. a) Sea $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T_1[x, y] = \left[\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right]$. Muestre que T_1 es una transformación lineal.
- b) Sea $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ un cuadrado con lados de longitud 2 y con centro en el origen y sea T_1 la transformación lineal del numeral a). Encuentre la imagen por T_1 del cuadrado D , es decir, $T_1(D)$. Haga un dibujo de $T_1(D)$.
- c) Halle una transformación lineal T_2 que rote en un ángulo de 90 grados el cuadrado D del inciso 2a).
- d) Halle una transformación lineal T_3 que refleje sobre la recta $y = 2x$ el cuadrado D . Haga un dibujo de $T_3(D)$.
- e) Haga un dibujo de $(T_2 \circ T_3)(D)$.
4. Explique por que el conjunto con las operaciones dadas NO es un espacio vectorial.
- a) $H = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$, con las operaciones de suma y producto por escalar usuales.
- b) $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2} : ad - bc = 0 \right\}$, con las operaciones de suma y producto por escalar usuales de las matrices 2×2 .
- c) $K = \{P(x) \in P_2 / P(0) = 1\}$, con las operaciones de suma y producto por escalar usuales en los polinomios de grado a lo mas 2.
5. Diga por que el conjunto con las operaciones dadas es un espacio vectorial y proporcione una base para el espacio.
- a) $H = \{A \in M_{2 \times 2} : A^T = A\}$, con las operaciones usuales de las matrices 2×2 .
- b) $L = \left\{ p(x) \in P_2 : \int_0^1 p(x)dx = 0 \right\}$, con las operaciones de suma y producto por escalar usuales entre polinomios en P_2 .
- c) $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ siguientes:
 si $a, b \in M$ definimos la operación $a \oplus b = ab$ (multiplicación usual entre reales)
 y si $a \in M$ y $r \in \mathbb{R}$ definimos la operación $r \odot a = a^r$.
6. a) Encontrar todos los valores del parámetro k para los cuales la matriz
- $$A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$$
- es no singular o invertible.
- b) Asuma que A y B son matrices $n \times n$ con $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Encuentre:

- i) $\text{Det}(AB)$.
 - ii) $\text{Det}(3B^T)$.
 - iii) $\text{Det}(B^{-1}AB)$.
- c) Si A es una matriz $n \times n$, halle el $\det(\text{Adj}(A))$.

7. Probar que:

- a) Probar que la distancia entre dos planos paralelos con ecuaciones $\vec{n} \cdot \vec{x} = d_1$ y $\vec{n} \cdot \vec{x} = d_2$ esta dada por $\frac{|d_1 - d_2|}{\|\vec{n}\|}$.
- b) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$.
- c) Si $A_{n \times n}$ es una matriz invertible, entonces $\text{Adj}(A)$ es una matriz invertible y que $(\text{Adj}(A))^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{Adj}(A^{-1})$.
- d) Suponga que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^n$ y que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal. Pueba que los vectores $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_k)$, son linealmente dependientes. Qué puede decir si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ son linealmente independientes?