Algebra Lineal

Luis Jaime Corredor
Universidad de Los Andes

Enero de 2006

Índice general

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Introducción

Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x, y, z:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

Una *solución* del sistema lineal $\mathcal{S}$ es una tripla (x_0, y_0, z_0) de números reales (es decir un elemento de $\mathbb{R}^3$) que satisface simultáneamente las tres ecuaciones, es decir que cumple

$$\begin{array}{llll} 2x_0 & +4y_0 & +6z_0 & = 18 \\ 4x_0 & +5y_0 & +6z_0 & = 24 \\ 3x_0 & +y_0 & -2z_0 & = 4 \end{array}$$

La tripla $(4, -2, 3)$ es una solución, ¡compruébelo!. En principio puede haber más de una tripla de reales que sea solución al sistema $\mathcal{S}$.

Al conjunto de las triplas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan las tres ecuaciones de $\mathcal{S}$, se le llama el *conjunto solución de* $\mathcal{S}$ y se denota por $Sol(\mathcal{S})$. Claramente en este caso $Sol(\mathcal{S})$ es un subconjunto[1] de $\mathbb{R}^3$.

Las primeras metas que alcanzaremos en este curso son:

1. Desarrollar un método, *el método de Gauss-Jordan*, que nos permita encontrar el conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones cualesquiera $\mathcal{S}$.

2. Entender el carácter del conjunto solución $Sol(\mathcal{S})$ de un sistema lineal de ecuaciones $\mathcal{S}$ cualquiera: Mostraremos por ejemplo que $Sol(\mathcal{S})$ o bien es vacío, o tiene exactamente un elemento o es infinito. En el caso en que por ejemplo el número de incógnitas son tres, digamos x, y y z, $Sol(\mathcal{S})$ es un subconjunto del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ con una estructura geométrica muy determinada: es o bien vacío, o un punto, o una línea recta, o un plano o todo $\mathbb{R}^3$.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones *son equivalentes* si poseen exactamente las mismas soluciones. Por ejemplo los sistemas

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{array} \right.$$

[1]Recuerde que un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B si todo elemento de A es también un elemento de B

y

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 9 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{cases}$$

son equivalentes, pues se puede ver fácilmente que (x_0, y_0, z_0) es solución de $\mathcal{S}$ si y sólo si es solución de $\mathcal{S}_1$.

Ejemplo 1.1.1. *Ilustraremos el método que desarrollaremos para encontrar el conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones "solucionando", el primer ejemplo que dimos. Lo que haremos es dar una secuencia de sistemas equivalentes entre si, de tal forma que el primero es el sistema que deseamos solucionar y la solución del último sistema sea evidente de encontrar.*

Introducimos la siguiente notación:

1. *e_i denota la ecuación i-ésima,*

2. *$ae_i + e_j \mapsto e_j$ significa: "multiplicamos la i-ésima ecuación por a, esto se lo sumamos a la j-ésima ecuación, y el resultado lo colocamos como la j-ésima ecuación del nuevo sistema".*

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{cases} \quad \xrightarrow{\frac{1}{2}e_1 \mapsto e_1}$$

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 9 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{cases} \quad \begin{array}{c} -4e_1 + e_2 \mapsto e_2 \\ -3e_1 + e_3 \mapsto e_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\mathcal{S}_2 = \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 9 \\ & -3y & -6z & = & -12 \\ & -5y & -11z & = & -23 \end{cases} \quad \xrightarrow{(-\frac{1}{3})e_2 \mapsto e_2}$$

$$\mathcal{S}_3 = \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 9 \\ & y & +2z & = & 4 \\ & -5y & -11z & = & -23 \end{cases} \qquad \xrightarrow[\quad]{\substack{-2e_2 + e_1 \mapsto e_1 \\ 5e_2 + e_3 \mapsto e_3}}$$

$$\mathcal{S}_4 = \begin{cases} x & & -z & = & 1 \\ & y & +2z & = & 4 \\ & & -z & = & -3 \end{cases} \qquad \xrightarrow{(-1)e_3 \mapsto e_3}$$

$$\mathcal{S}_5 = \begin{cases} x & & -z & = & 1 \\ & y & +2z & = & 4 \\ & & z & = & 3 \end{cases} \qquad \xrightarrow[\quad]{\substack{e_3 + e_1 \mapsto e_1 \\ -2e_3 + e_2 \mapsto e_2}}$$

$$\mathcal{S}_6 = \begin{cases} x & & & = & 4 \\ & y & & = & -2 \\ & & z & = & 3 \end{cases}$$

Evidentemente el conjunto solución de $\mathcal{S}_6$ *es* $\{(4,-2,3)\}$ *y como todos los sistemas son equivalentes tenemos la solución de nuestro sistema* $\mathcal{S}$*:*

$$Sol(\mathcal{S}) = \{(4,-2,3)\} \quad \textit{(Esta solución es un punto.)}$$

Un sistema como $\mathcal{S}_5$ se dice que está en *forma escalonada* y otro como $\mathcal{S}_6$ se dice que está en *forma escalonada reducida.* Estos son particularmente sencillos de resolver. Mostraremos que usando el método de eliminación de Gauss-Jordan podemos transformar CUALQUIER sistema lineal de ecuaciones en uno EQUIVALENTE A ÉSTE, que esté en forma escalonada (reducida) y de esta forma obtener el conjunto solución del sistema dado.

Con el fin de ilustrar el método de Gauss-Jordan que introduciremos más adelante, damos otro par de ejemplos de sistemas lineales de ecuaciones y encontramos sus soluciones transformándolos en sistemas equivalentes en forma escalonada reducida.

Ejemplo 1.1.2. *Considere el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones en las tres incógnitas x, y y z:*

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & -3z & = & 2 \\ & 3x & -2y & +z = & 3 \end{array}\right.$$

Para encontrar su "conjunto solución" damos una cadena de sistemas lineales equivalentes:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & -3z & = & 2 \\ & 3x & -2y & +z = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +\frac{1}{2}y & -\frac{3}{2}z & = & 1 \\ & 3x & -2y & +z = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +\frac{1}{2}y & -\frac{3}{2}z & = & 1 \\ & & -\frac{7}{2}y & +\frac{11}{2}z = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +\frac{1}{2}y & -\frac{3}{2}z & = & 1 \\ & & y & -\frac{11}{7}z = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -\frac{5}{7}z & = & 1 \\ & y & -\frac{11}{7}z = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora es claro que el conjunto solución para el último sistema (¡y por lo tanto también para el primero!) consta de las triplas (x_0, y_0, z_0) para las *cuales* z_0 *es un número real cualquiera,* $y_0 = \frac{11}{7}z_0$ *y* $x_0 = 1 + \frac{5}{7}z_0$*. Otra manera de expresar el conjunto solución de este sistema es:*

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1 + \frac{5}{7}t \\ \frac{11}{7}t \\ t \end{array} \right) \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Así las soluciones al sistema dado son las triplas de la forma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{11}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$*, con* t *un número real cualquiera.*

Ejemplo 1.1.3. *Considere el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:*

$$\begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad = \quad 1 \\ 2x \quad +2y \quad +2z = \quad 2 \\ 3x \quad +3y \quad +3z = \quad 3 \end{cases}$$

Este sistema es evidentemente equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad = \quad 1 \\ 0x \quad +0y \quad +0z = \quad 0 \\ 0x \quad +0y \quad +0z = \quad 0 \end{cases}$$

Pero en este nuevo sistema, las últimas dos ecuaciones se satisfacen por cualquier tripla, luego su conjunto solución consta de las triplas $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

donde y_0 y z_0 son números reales cualesquiera y $x_0 = 1 - y_0 - z_0$. Otra forma de expresar la solución general al sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

donde s y t son números reales cualesquiera.

Ejemplo 1.1.4. *Considere el sistema lineal de ecuaciones:*

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad = \quad 1 \\ \quad 2x \quad +2y \quad +2z = \quad 3 \end{cases}$$

Es claro que este sistema es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad = \quad 1 \\ \quad 0x \quad +0y \quad +0z = \quad 1 \end{cases}$$

Pero este sistema no posee soluciones (pues la segunda ecuación es imposible de satisfacerse). Por lo tanto, el conjunto solución de este sistema (y por lo tanto del original) es el conjunto vacío. Esto lo escribimos así:

$$Sol(\mathcal{S}) = \varnothing.$$

Ejemplo 1.1.5. *Considere el siguiente sistema lineal con una sóla ecuación en tres incógnitas:*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0x & +0y & +0z & = & 0 \end{array} \right.$$

Es claro que toda tripla de números reales es una solución de este sistema, y por lo tanto su conjunto solución es $\mathbb{R}^3$.

Este tema con que comenzamos el curso está profundamente relacionado con otros temas que veremos como son:

1. Matrices.
2. Operaciones entre matrices.
3. Invertibilidad de una matriz cuadrada.
4. Determinante de una matriz cuadrada.
5. Geometría en $\mathbb{R}^3$: rectas, planos, ortogonalidad.
6. Espacios vectoriales - Subespacios.
7. Combinaciones lineales de vectores.
8. Generación de un espacio vectorial por ciertos vectores dados.
9. Independencia lineal de un conjunto de vectores.
10. Bases para un espacio vectorial.
11. Transformaciones lineales entre espacios vectoriales.
12. etc.

1.2. Matrices

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. A cada sistema lineal de ecuaciones están asociadas dos matrices que son "la matriz de coeficientes" y "la matriz aumentada" del sistema. En nuestro ejemplo éstas son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 3 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3. Teoría General de Sistemas Lineales

Un sistema lineal típico de m ecuaciones (con m un número natural cualquiera) en n incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (con n también un número natural) tiene la forma:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

en donde los a_{ij}'s y los b_i's son números reales.

Definición 1.3.1. *Una* solución *del sistema* $\mathcal{S}$ *es una* n*-tupla de reales* $(y_1, \cdots, y_n)$ *(un elemento de* $\mathbb{R}^n$*) que satisface cada una de las* m *ecuaciones de* $\mathcal{S}$ *cuando se remplaza cada variable* x_i *por el número real* y_i*.*

El conjunto de TODAS las soluciones de $\mathcal{S}$ lo denotamos por $Sol(\mathcal{S})$.

$$Sol(\mathcal{S}) := \{(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : (y_1, \cdots, y_n) \textit{es solución de} \mathcal{S}\}.$$

Un sistema $\mathcal{S}$ sin soluciones se llama un *sistema inconsistente.* En este caso $Sol(\mathcal{S}) = \varnothing$. Un ejemplo de un sistema inconsistente es

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x & +y & = 3 \\ 2x & +2y & = 5 \end{cases}$$

Por el contrario, decimos que un sistema es *consistente* si posee al menos una solución.

Definición 1.3.2. *Dos sistemas lineales de ecuaciones $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ en el mismo número de incógnitas son* equivalentes *si poseen EXACTAMENTE las mismas soluciones, es decir si $Sol(\mathcal{S}) = Sol(\mathcal{S}')$.*

En los ejemplos que desarollamos en la introducción utilizamos el siguiente hecho: si a un sistema $\mathcal{S}$ se le efetúa una de las siguientes tres operaciones descritas abajo, obtenemos un sistema $\mathcal{S}'$ que es equivalente a $\mathcal{S}$.

1. Intercambiar ecuaciones.

2. Multiplicar (o dividir) las ecuaciones por un número real distinto de 0.

3. Adicionar un múltiplo de alguna ecuación a otra ecuación.

Teorema 1.3.3. *Si $\mathcal{S}$ es un sistema lineal de ecuaciones de $m \times n$* [2] *y $\mathcal{S}'$ es el sistema que resulta de aplicar una operación del tipo* (1)*,* (2) *o* (3)*, entonces $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son equivalentes.*

[2] Un sistema de ecuaciones de $m \times n$ es un sistemas de ecuaciones con m ecuaciones y n incógnitas.

Demostración. Es claro que si $(y_1, \cdots, y_n)$ es solución de $\mathcal{S}$ entonces también lo es de $\mathcal{S}'$, pues aplicando la misma operación que usamos para pasar de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ a las identidades que comprueban que $(y_1, \cdots, y_n)$ es solución de $\mathcal{S}$, obtenemos identidades que comprueban que $(y_1, \cdots, y_n)$ es solución de $\mathcal{S}'$. (Ver ejemplo 1.3.4 después de esta demostración). Esto muestra que $Sol(\mathcal{S})$ es un subconjunto de $Sol(\mathcal{S}')$. Pero es fácil ver que las operaciones $(1), (2), (3)$ son todas invertibles, o reversibles. Es decir que siempre podemos retornar de $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}$ mediante una operación elemental de tipo $(1), (2)$ o (3). Luego por el argumento anterior tendríamos que $Sol(\mathcal{S}')$ es un subconjunto de $Sol(\mathcal{S}')$, luego $Sol(\mathcal{S}) = Sol(\mathcal{S}')$ y por tanto los sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son equivalentes. $\square$

Ejemplo 1.3.4. *Considere el sistema lineal de ecuaciones*

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{array} \right.$$

dado al comienzo de la introducción. Intercambiando las ecuaciones segunda y tercera, una operación del tipo (1)*, obtenemos el sistema*

$$\mathcal{S}_1 : \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \end{array} \right.$$

Esta operación la abreviamos por $e_2 \leftrightarrow e_3$*. Multiplicando la primera ecuación de* $\mathcal{S}$ *por* $1/2$*, una operación del tipo* (2)*, obtenemos*

$$\mathcal{S}_2 : \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & = & 9 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{array} \right.$$

Esta operación la abreviamos por $\frac{1}{2}e_1 \mapsto e_1$. *Multiplicando la primera ecuación de* $\mathcal{S}$ *por* -2 *y sumándola a la segunda, una operación del tipo* (3), *obtenemos,*

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 0 & -3y & -6z & = & -12 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{cases}$$

Esta operación la abreviamos por $(-2)e_1 + e_2 \mapsto e_2$. *Las identidades que comprueban que la tripla* $(4, -2, 3)$ *es solución de* $\mathcal{S}$ *son:*

$$\begin{cases} 2(4) & +4(-2) & +6(3) & = & 18 \\ 4(4) & +5(-2) & +6(3) & = & 24 \\ 3(4) & +(-2) & -2(3) & = & 4 \end{cases}$$

Es fácil ver que, aplicando a estas identidades, una de las tres operaciones efectuada a $\mathcal{S}$ *arriba, obtenemos las identidades que comprueban que la tripla* $(4, -2, 3)$ *es solución del correspondiente sistema lineal obtenido:* $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ *o* $\mathcal{S}_3$.

Ahora, para ilustrar que las operaciones elementales de tipo $(1), (2)$ *y* (3) *son reversibles como se afirma arriba, observemos que*

1. $\mathcal{S}_1$ *se transforma en* $\mathcal{S}$ *mediante la operación* $e_2 \leftrightarrow e_3$.

2. $\mathcal{S}_2$ *se transforma en* $\mathcal{S}$ *mediante la operación* $2e_1$.

3. $\mathcal{S}_3$ *se transforma en* $\mathcal{S}$ *mediante la operación* $2e_1 + e_2 \mapsto e_2$.

1.4. Eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo 1.4.1. *Es muy sencillo encontrar las soluciones de un sistema lineal como el siguiente*

$$\mathcal{S}:\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & -4x_5 & & =1 \\ & & x_3 & & +2x_5 & -2x_6 & =4 \\ & & & x_4 & -x_5 & +x_6 & =3 \\ & & & & x_5 & -x_6 & =-2 \end{array}\right.$$

x_6*: Puede tomar un valor cualquiera* $a \in \mathbb{R}$.

x_5 : *se forza a ser* $-2+a$.

x_4 : *se forza a ser* $3-a+(-2+a)=1$.

x_3 : *se forza a ser* $4-2(-2+a)+a=8-a$.

x_2*: Puede tomar un valor cualquiera* $b \in \mathbb{R}$.

x_1 : *se forza a ser* $-2b-3(8-a)+4(-2+a)=-31-2b+7a$.

Podemos expresar a $Sol(\mathcal{S})$ *así:*

$$Sol(\mathcal{S})=\{(-31+7a-2b, b, 8-a, 1, a-2, a) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

En este caso x_6 *y* x_2 *son* variables independientes.

Un sistema como $\mathcal{S}$ está en "forma escalonada". Aún más fácil es identificar las soluciones de un sistema "en forma escalonada reducida" como es el sistema $\mathcal{S}'$ a continuación, que obtenemos de $\mathcal{S}$ mediante la aplicación de cuatro operaciones elementales del tipo (3): $10e_4+e_1 \mapsto e_1$, $-2e_4+e_2 \mapsto e_2$

y $e_4 + e_3 \mapsto e_3$, (donde e_i corresponde a la ecuación i-ésima).

$$\mathcal{S}' : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & & & & -7x_6 & = -31 \\ & & x_3 & & & x_6 & = 8 \\ & & & x_4 & & & = 1 \\ & & & & x_5 & -x_6 & = -2 \end{cases}$$

Es evidente que $Sol(\mathcal{S}') = \{(7a-2b-31, b, -8-a, 1, a-2, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$, que naturalmente es lo mismo que $Sol(\mathcal{S})$.

Para temas que veremos más adelante, es conveniente entender que una forma de expresar la solución general de este sistema es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -31 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

1.5. Sistema Escalonado Reducido

Definición 1.5.1. *Un sistema lineal de ecuaciones de $m \times n$ está en* forma escalonada *si cumple:*

(1) Todas las cero ecuaciones[3] *están de una cierta fila en adelante.*

(2) Toda ecuación que no sea cero-ecuación tiene como coeficiente de su primera variable a 1 *(Este* 1 *lo llamaremos el* pivote *de la ecuación).*

[3]Una cero-ecuación es una ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$.

(3) Si $i < j$ y las ecuaciones i-ésima y j-ésima no son cero-ecuaciones y el pivote de la i-ésima acompaña a la variable x_{k_i} y el de la j-ésima acompaña a la variable x_{k_j} entonces $k_i < k_j$.

Diremos que está en forma escalonada reducida *si además se cumple la siguiente condición:*

(4) Para todo i entre 1 y m, si la i-ésima ecuación no es una cero ecuación, y x_{k_i} es la variable que acompaña el pivote de esta ecuación, entonces el coeficiente de x_{k_i} en todas las otras ecuaciones es 0.

Las variables con pivote se llaman *dependientes* y las variables sin pivote se llaman *independientes*.

El sistema $\mathcal{S}'$ arriba está en forma escalonada reducida. Aquí x_2 y x_6 son variables independientes y x_1, x_3, x_4 y x_5 son variables dependientes. Como se observó en este ejemplo, es muy fácil hallar las soluciones de un sistema en forma escalonada reducida. Lo interesante es que TODO sistema lineal de ecuaciones es equivalente a uno en forma escalonada reducida, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 1.5.2. *Cualquier sistema lineal de ecuaciones de $m \times n$ es equivalente a uno en forma escalonada reducida. MÁS AÚN, cualquier sistema lineal de ecuaciones $\mathcal{S}$ de $m \times n$ se puede transformar por medio de un número finito de operaciones elementales de tipo $(1)-(3)$ en un sistema $\mathcal{E}$ en forma escalonada reducida.*

No es difícil convencerse de que el teorema anterior es cierto, sin embargo no daremos aquí su demostración. Una demostración formal de éste utiliza inducción en el tamaño $m \times n$ del sistema.

El método de Gauss-Jordan para encontrar las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones consiste en transformar éste, mediante operaciones elementales de tipo (1)-(3) en uno que se encuentre en forma escalonada reducida. Damos a continuación un algoritmo para efectuar dicha transformación.

Suponga que tenemos un sistema lineal $\mathcal{S}$ con m ecuaciones en las variables $x_1, \cdots, x_n$. Siguiendo los siguientes pasos obtenemos siempre el sistema en forma escalonada reducida equivalente al sistema $\mathcal{S}$:

(i) Inspeccione las ecuaciones de izquierda a derecha, para encontrar la primera variable, digamos x_{i_1}, que en alguna ecuación aparece con coeficiente distinto de cero (normalmente esta variable es x_1). Intercambiando ecuaciones y multiplicando por un escalar (número) apropiado, podemos suponer que x_{i_1} ocurre en la primera ecuación, con coeficiente 1[4].

(ii) Sumar multiplos apropiados de la primera ecuación a cada una de las otras ecuaciones, para hacer desaparecer la variable x_{i_1} de estas.

Suponga ahora que ya se ha transformado el sistema en uno que tiene pivotes en sus k ($1 \leq k \leq m$) primeras ecuaciones y se han identificado sus correspondientes variables independientes $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$. Para determinar cual es la $k+1$-ésima ecuación del sistema en forma escalonada reducida realizar los siguientes pasos.

(iii) Inspeccionar las ecuaciones de la $k+1$ a la m de izquierda a derecha, para encontrar la primera variable, digamos $x_{i_{k+1}}$, que en alguna de estas ecuaciones aparece con coeficiente distinto de cero. Se tiene siem-

[4] Este 1 es el primer "pivote z x_{i_1} es la primera "variable dependiente".

pre que $i_{k+1} > i_k$).[5] Intercambiando dos ecuaciones y multiplicando por un escalar apropiado, podemos suponer que $x_{i_{k+1}}$ ocurre en la $k+1$-ésima ecuación, con coeficiente 1.

(iv) Sumar múltiplos apropiados de la $k+1$-ésima ecuación a cada una de las otras ecuaciones, para hacer desaparecer la variable $x_{i_{k+1}}$ de éstas.

Ejemplo 1.5.3. *Considere los siguientes tres sistemas lineales en forma escalonada reducida $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$:*

$$\mathcal{E}_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & +2x_2 & & & & -7x_6 & = & 1 \\ & & x_3 & & & x_6 & = & 4 \\ & & & x_4 & & & = & 1 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{E}_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 3 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{E}_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & & & & -7x_6 & = -31 \\ & & x_3 & & & +x_6 & = 8 \\ & & & x_4 & & & = 1 \\ & & & & x_5 & -x_6 & = -2 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & = 0 \end{array} \right.$$

Se ve muy fácilmente cuales son sus respectivos conjuntos solución:

[5]Si no se encuentra tal variable, las ecuaciones de la $k+1$ a la m son cero-ecuaciones y el proceso termina.

$Sol(\mathcal{E}_1) = \emptyset$.

$Sol(\mathcal{E}_2) = \{(1, 3, -1)\}$.

$Sol(\mathcal{E}_3) = \{(7a - 2b - 31, b, -8 - a, 1, a - 2, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{E}_1$ es inconsistente, $\mathcal{E}_2$ tiene solución única y $\mathcal{E}_3$ tiene infinitas soluciones. Analizando estos tres ejemplos vemos que el siguiente teorema es claro.

Teorema 1.5.4. *Si $\mathcal{E}$ es un sistema lineal de $m \times n$ cualquiera en forma escalonada reducida, exactamente una de las siguientes posibilidades se da:*

1. *Existe por lo menos una cero-ecuación enfrentada a un número distinto de cero. En este caso $\mathcal{E}$ es inconsistente.*

2. *No se da (1) y toda variable está acompañada en alguna ecuación de un pivote. Es decir, toda variable es dependiente. En este caso el sistema es consistente y posee una única solución.*

3. *No se da (1) y no se da (2). Es decir que hay variables independientes o no toda variable posee pivote. En este caso $\mathcal{E}$ es consistente, más aún posee infinitas soluciones.*

De los teoremas 1.5.2 y 1.5.4 se desprende fácilmente:

Teorema 1.5.5. *Para todo sistema lineal de ecuaciones $\mathcal{S}$ vale exactamente una de las siguientes tres afirmaciones:*

(i) *$\mathcal{S}$ es inconsistente.*

(ii) *$\mathcal{S}$ tiene exactamente una solución.*

(ii) *$\mathcal{S}$ tiene infinitas soluciones.*

Ilustramos el método de Gauss-Jordan o más precisamente el algoritmo dado arriba en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.6. *Encontrar el conjunto solución del sistema lineal de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & -8x_5 & & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & +7x_3 & & -6x_5 & -2x_6 & = & 6 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 & +x_4 & -11x_5 & -x_6 & = & 10 \\ 4x_1 & +8x_2 & +13x_3 & +x_4 & -14x_5 & -2x_6 & = & 9 \\ 5x_1 & +10x_2 & +17x_3 & +x_4 & -17x_5 & -3x_6 & = & 16 \end{array}\right.$$

La primera variable, de izquierda a derecha, que aparece en alguna ecuación acompañada de un coeficiente distinto de cero es x_1*. En la primera ecuación ésta aparece con coeficiente* 2*. Si multiplicamos esta ecuación por el escalar* $\frac{1}{2}$ *obtenemos un sistema equivalente en el cual tenemos ya un pivote:*

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & -4x_5 & & = & 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +7x_3 & & -6x_5 & -2x_6 & = & 6 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 & +x_4 & -11x_5 & -x_6 & = & 10 \\ 4x_1 & +8x_2 & +13x_3 & +x_4 & -14x_5 & -2x_6 & = & 9 \\ 5x_1 & +10x_2 & +17x_3 & +x_4 & -17x_5 & -3x_6 & = & 16 \end{array}\right.$$

Según el paso (ii) del algoritmo debemos ahora realizar operaciones de tipo (3) para hacer desaparecer la variable x_1 *de las otras ecuaciones. Esto lo logramos mediante las siguientes operaciones:*

$(-2)e_1 + e_2 \mapsto e_2,$

$(-3)e_1 + e_3 \mapsto e_3,$

$(-4)e_1 + e_4 \mapsto e_4$ *y*

$(-5)e_1 + e_5 \mapsto e_5$.

Obtenemos así el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & -4x_5 & & = & 1 \\ & & x_3 & & +2x_5 & -2x_6 & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & -x_6 & = & 7 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & -2x_6 & = & 5 \\ & & 2x_3 & +x_4 & +3x_5 & -3x_6 & = & 11 \end{array}\right.$$

Como el coeficiente de x_3 en la segunda ecuación es 1, este es el segundo pivote. Para anular ahora los coeficientes de x_3 en las otras ecuaciones realizamos las siguientes operaciones:

$(-3)e_2 + e_1 \mapsto e_1$,

$-e_2 + e_3 \mapsto e_3$,

$-e_2 + e_4 \mapsto e_4$ *y*

$(-2)e_2 + e_5 \mapsto e_5$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & +2x_2 & & & -10x_5 & +6x_6 & = & -11 \\ & & x_3 & & +2x_5 & -2x_6 & = & 4 \\ & & & +x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 3 \\ & & & +x_4 & & & = & 1 \\ & & & x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 3 \end{array}\right.$$

El tercer pivote es el coeficiente 1 *de la variable* x_4 *en la tercera ecuación. Para hacer desaparecer* x_4 *de las otras ecuaciones efectuamos las siguientes operaciones:*

$-e_3 + e_4 \mapsto e_4$ *y*

$-e_3 + e_5 \mapsto e_5$.

Obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & & & -10x_5 & +6x_6 & = & -11 \\ & & x_3 & & +2x_5 & -2x_6 & = & 4 \\ & & & +x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 3 \\ & & & & x_5 & -x_6 & = & -2 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

El cuarto pivote es el coeficiente 1 *de la variable* x_5 *en la cuarta ecuación. Para hacer desaparecer la variable* x_5 *de las otras ecuaciones efectuamos las siguientes operaciones:*

$10e_4 + e_1 \mapsto e_1$,

$-2e_4 + e_2 \mapsto e_2$ *y*

$e_4 + e_3 \mapsto e_3$.

Obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & & & & -4x_6 & = & -31 \\ & & x_3 & & & & = & 8 \\ & & & +x_4 & & & = & 1 \\ & & & & x_5 & -x_6 & = & -2 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este último sistema se encuentra en forma escalonada reducida y por tanto es fácil encontrar su conjunto solución que obviamente es también el conjunto solución del sistema lineal de ecuaciones que nos fue dado, pues estos dos sistemas son equivalentes.

Analizando el sistema podemos decir lo siguiente:

(a) $x_3 = 8$ *y* $x_4 = 1$*,*

(b) Si elegimos a x_2 *y* x_6 *como variables independientes, y ponemos* $x_2 = b$ *y* $x_6 = a$*, entonces de las ecuaciones* e_1 *y* e_4 *concluimos que* $x_1 = -31 - 2b + 4a$ *y* $x_5 = -2 + a$*. Note que* x_1 *y* x_5 *son variables dependientes, pues éstas dependen de* a *y* b*.*

Concluimos que el sistema posee infinitas soluciones, todas de la forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *en donde* $x_3 = 8$*,* $x_4 = 1$*,* x_2 *es cualquier número real* b*,* x_6 *es cualquier número real* a*, y* x_1 *y* x_5 *están determinados por* a *y* b*. Entonces el conjunto solución del sistema es:*

$$\{(-31 - 2b + 4a, b, 8, 1, -2 + a, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

1.6. Sistemas Lineales Homogéneos

Un sistema lineal se dice *homogéneo* si todos los términos a la derecha de las ecuaciones son ceros. Es decir si tiene la forma:

$$\mathcal{H}: \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Claramente la n-tupla trivial $(0, 0, \cdots, 0)$ es siempre solución de un tal sistema. Esta se llama "La *solución trivial*" del sistema homogéneo $\mathcal{H}$.

De los teoremas anteriores se sigue fácilmente los siguientes resultados sobre sistemas homogéneos.

Teorema 1.6.1. *Un sistema lineal homogéneo $\mathcal{H}$ de $m \times n$ tiene soluciones distintas de la trivial si y solo si el número de pivotes, r, en su forma escalonada reducida $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, es menor que el número de incógnitas ($r < n$).*

Corolario 1.6.2. *Si $\mathcal{H}$ es un sistema lineal homogéneo de $m \times n$, con $m < n$, entonces $\mathcal{H}$ posee soluciones distintas de la trivial.*

Capítulo 2

Matrices y sistemas lineales

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1.1. *Una matriz A de $m \times n$ con entradas en el campo de los reales $\mathbb{R}$ es un arreglo rectangular de m por n números reales. Para i y j con $1 \leq i \leq m$, y $1 \leq j \leq n$, la entrada en la posición i, j la denotamos por A_{ij}. Si el nombre de la matriz es "$Fulanita$" en lugar de A, la entrada ij-ésima en "$Fulanita$" la denotamos por $(Fulanita)_{ij}$.*

Ejemplo 2.1.2. *Los siguientes son ejemplos de matrices:*

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pi & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Una matriz típica de $m \times n$ la notamos por:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2. Notación y algunas matrices especiales

1. Si A es una matriz de $m \times n$, como en el último ejemplo, denotaremos por A_i a la i-ésima fila de A $(1 \leq i \leq m)$ y por A^j a la j-ésima columna de A $(1 \leq j \leq n)$. En el ejemplo 2.1.2.2 arriba,

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

y

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Con nuestra notación, A_i es la matriz de $1 \times n$ tal que $(A_i)_j = A_{ij}$, y A^j es la matriz de $m \times 1$ tal que $(A^j)_{i1} = A_{ij}$.

2. Denotaremos el conjuntos de todas las matrices de $m \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ por $Mat_{mn}(\mathbb{R})$.

3. Una matriz de $n \times 1$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la llamaremos un *n-vector*. $\mathbb{R}^n$ denotará el conjunto o espacio de todos los n-vectores.

4. Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, diremos que es una *matriz cuadrada* .

5. Una 0-*matriz* es una en la que todas sus entradas son 0. Denotamos por O_{mn} a la 0-matriz de $m \times n$.

6. La *matriz identidad de* $n \times n$, I_n (o simplemente I), es la matriz de $n \times n$ con 1's en la "*diagonal principal*" y ceros en las otras entradas; esto es:

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Esta matriz tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

7. Una matriz cuadrada A es *triangular superior* si sus entradas "abajo de la diagonal principal" son todas cero. Esto es, si $A_{ij} = 0$ siempre que $i > j$.

8. Una matriz cuadrada A es *triangular inferior* si $A_{ij} = 0$ siempre que $i < j$.

9. Una matriz cuadrada D es una *matriz diagonal* si todas sus entradas "fuera de la diagonal principal" son cero. Es decir: $D_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

2.3. Operaciones entre matrices

Sean A, B matrices de $m \times n$ y λ un número real (o escalar). Definimos la *suma de A y B*, $A + B$, como la matriz de $m \times n$ tal que:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

En palabras: tal que la entrada ij-ésima de $A + B$ es la entrada ij-ésima de A más la entrada ij-ésima de B.

Definimos el *producto* entre λ y A, $\lambda \cdot A$, como la matriz de $m \times n$ tal que $(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij}$. Notaremos $A - B$ a la matriz $A + (-1)B$. A la matriz $(-1)A$ la denotaremos usualmente por $-A$ y la llamaremos el *opuesto de A*. Esta matriz tiene la propiedad de que $A + (-A) = 0_{mn}$.

Ahora, si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$, entonces, *el producto entre* A y B, es la matriz, que notamos $A \cdot B$ de tamaño $m \times p$ y tal que:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Es importante observar que **el producto $A \cdot B$ solamente está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.**

Ejemplos 2.3.1. *1. Si*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \ y \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (4)(3) + (-5)(2) & (4)(1) + (-5)(0) \\ (-3)(3) + (2)(2) & (-3)(1) + (2)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}.$$

Esto muestra que el producto entre matrices no es conmutativo, o en otras palabras, es importante el orden en que las multipliquemos.

2. *Tome*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} , \ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que A es una matriz de 2×2, B es una matriz de 2×3 y C es una matriz de 3×2. Entonces podemos calcular el producto $A \cdot B$ (llamémosle W):

$$W = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -9 & -17 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora el producto $(A \cdot B) \cdot C = W \cdot C$:

$$W \cdot C = \begin{pmatrix} 12 + 36 + 16, & 4 - 18 - 17 \\ -9 - 20 - 4, & -3 - 10 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & -31 \\ -33, & 11 \end{pmatrix}$$

Ya conocemos $(A \cdot B) \cdot C$. Queremos ahora ver qué matriz es $A \cdot (B \cdot C)$. Para esto primero calculemos $B \cdot C$ (llamémosle X):

$$X = B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot X$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 20 + 45, & 4 - 35 \\ -15 - 18, & -3 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & -31 \\ -33, & 11 \end{pmatrix}$$

Observe que hemos llegado al mismo resultado: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Si A es una matriz de $m \times n$, definimos su *transpuesta*, como la matriz A^t de tamaño $n \times m$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Una matriz cuadrada A se dice *simétrica* si $A = A^t$; en palabras, si ella es igual a su transpuesta.

Las propiedades de las operaciones que enunciamos en el siguiente teorema, nos permitirán desarrollar un álgebra de matrices muy conveniente para el resto del curso:

Teorema 2.3.2. *Sean A, B, C matrices cualesquiera de dimensiones apropiadas de modo que las operaciones entre ellas, expresadas a continuación tengan sentido (estén bien definidas). Sean α y β números reales y denotemos por I y por O la matriz identidad y la matriz de ceros respectivamente. Entonces:*

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + O = A$.
4. $A + (-A) = 0$.
5. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
6. $A \cdot I = A$ *(aquí A no es necesariamente una matriz cuadrada).*
7. $I \cdot A = A$ *(aquí A no es necesariamente una matriz cuadrada).*
8. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
9. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
10. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
11. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$.

12. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

13. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

14. $(A+B)^t = A^t + B^t$.

15. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Demostración. Es importante comprender que para mostrar que dos matrices son iguales se debe mostrar que tienen el mismo tamaño y que las entradas correspondientes de las dos matrices son idénticas. Veremos que la notación que fijamos para hablar de la entrada ij-ésima de una matriz es particularmente útil demostrando identidades.

Mostremos la **propiedad 5)**: Suponga que A, B, C son matrices de tamaño $m \times n$, $n \times p$ y $p \times q$ respectivamente. Entonces, por definición, $(AB)C$ y $A(BC)$ tienen ambas tamaño $m \times q$. Ahora veamos cuál es la entrada ij-ésima de cada una:

$$
\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} = \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk}) C_{kj} = \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} (A_{il} B_{lk}) C_{kj}
\end{aligned}
$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} A_{il}(BC)_{lj} = \\
&= \sum_{l=1}^{n} A_{il} \sum_{k=1}^{p} B_{lk}C_{kj} = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} (A_{il}B_{lk})C_{kj}
\end{aligned}$$

y es claro que estas dos expresiones son iguales.

Probemos también la **propiedad (14)**: Suponga que A, B son ambas matrices de $m \times n$, entonces tanto $(A+B)^t$ como $A^t + B^t$ son matrices de $n \times m$. Ahora,

$$\begin{aligned}
[(A+B)^t]_{ij} &= (A+B)_{ji} \\
&= A_{ji} + B_{ji} \\
&= (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} \\
&= (A^t + B^t)_{ij}
\end{aligned}$$

Luego $(A+B)^t = A^t + B^t$. □

Teorema 2.3.3. *Sean A matriz de $m \times n$, B matriz de $n \times p$ y $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un n-vector. Entonces,*

1. $(AB)^j = A \cdot B^j$.

2. $(AB)_i = A_i B$.

3. $A \cdot \bar{x} = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n$.

Demostración. (1) Es claro que tanto el tamaño de $(AB)^j$ como el de $A \cdot B^j$ es $m \times 1$. Ahora,

$$[(AB)^j]_{i1} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Por otro lado,

$$(AB^j)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot (B^j)_{k1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

(3) Claramente las dos matrices tienen tamaño $m \times 1$. Ahora,

$$(A \cdot \bar{x})_{j1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot \bar{x}_{k1} = \sum_{k=1}^{n} x_k A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} x_k A_{ik}.$$

Por otro lado,

$$[x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n]_{i1} = \sum_{k=1}^{n} (x_k A^k)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} x_k (A^k)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} x_k A_{ik}.$$

$\square$

2.4. Notación matricial para sistemas lineales

Es fácil ver que el sistema lineal típico $\mathcal{S}$ de m ecuaciones en n incógnitas dado que en la sección 1.3 se escribe en forma matricial de la forma $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, donde A es la *matriz de coeficientes* del sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el vector de variables y $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. La demostración que damos del siguiente teorema nos muestra las ventajas de esta notación matricial comprimida, puesto que podemos usar el álgebra de matrices.

Teorema 2.4.1. *Sea $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ un solución particular del sistema lineal $\mathcal{S}$ de $m \times n$, $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$. Se tiene que $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ es una solución de $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, si y solamente si $\bar{y}$ tiene la forma $\bar{z} + \bar{p}$, donde $\bar{z}$ es una solución del sistema lineal homogéneo asociado $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Suponga que $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ es solución de $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, es decir $A \cdot \bar{y} = \bar{b}$. Por hipótesis $A \cdot \bar{p} = \bar{b}$. Claramente si $\bar{z} = \bar{y} - \bar{p}$, entonces $A \cdot \bar{z} = A \cdot (\bar{y} - \bar{p}) = A \cdot \bar{y} - A \cdot \bar{p} = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$ y por lo tanto $\bar{z}$ es solución de $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$. Eviedentemente $\bar{y} = (\bar{y} - \bar{p}) + \bar{p}$.

$\Leftarrow$ Suponga que $\bar{y} = \bar{z} + \bar{p}$ con $\bar{z}$ solución de $A \cdot \bar{x} = 0$. Entonces $A \cdot \bar{y} = A \cdot (\bar{z} + \bar{p}) = A \cdot \bar{z} + A \cdot \bar{p} = \bar{0} + \bar{b} = \bar{b}$. Luego $\bar{y}$ es solución de $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$. □

Por tanto tenemos que si $\bar{p}$ es una solución particular del sistema $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ y $\bar{z}$ es la "solución general" del sistema homogéneo asociado $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$, entonces $\bar{y} = \bar{z} + \bar{p}$ es la solución general del sistema lineal $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$.

2.5. Matrices Invertibles

Definición 2.5.1. *Una matriz cuadrada de $n \times n$ A se dice* invertible *si existe una matriz B de $n \times n$, tal que $AB = I$ y $BA = I$. Una tal matriz B se llama "una"* inversa *de A.*

Ejemplo 2.5.2. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz de 2×2 *tal que* $ad - bc \neq 0$. *Entonces* A *es invertible y la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

es "una" inversa para A *puesto que*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{ad}{ad-bc} - \frac{bc}{ad-bc}, & \frac{-ab}{ad-bc} + \frac{ba}{ad-bc} \\ \frac{cd}{ad-bc} - \frac{dc}{ad-bc}, & \frac{-cb}{ad-bc} + \frac{da}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

y similarmente puede verse que $B \cdot A = I$.

Teorema 2.5.3. *Una matriz cuadrada tiene a lo sumo una inversa.*

Demostración. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, y suponga que B_1 y B_2 son matrices de $n \times n$ tal que $A \cdot B_1 = I = B_1 \cdot A$ y $A \cdot B_2 = I = B_2 \cdot A$. Entonces $B_1 = B_1 \cdot I = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = I \cdot B_2 = B_2$. Luego $B_1 = B_2$. □

De ahora en adelante, si A es invertible denotaremos su única inversa por A^{-1}.

Teorema 2.5.4.

1. *Si* A *es invertible, entonces* A^{-1} *es invertible y* $(A^{-1})^{-1} = A$ *(esto último es lee: "la inversa de* A^{-1} *es* A*").*

2. *Si* A, B *son invertibles, entonces* AB *es invertible y se tiene que* $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ *(esto último se lee: "la inversa de* AB *es el producto entre la inversa de* B *y la inversa de* A*").*

Demostración. 1. Si A es invertile, entonces $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$, pero esto muestra que A^{-1} es invertible y que $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Suponga que A y B son invertibles. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ((AB)B^{-1}) \cdot A^{-1} = (A \cdot (B \cdot B^{-1})) \cdot A^{-1} \\
&= (A \cdot I) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I.
\end{aligned}
$$

De forma semejante se prueba que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ y por tanto podemos concluir que $A \cdot B$ es invertible y que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

□

La parte (2) de la prueba se generaliza a un producto finito de matrices invertibles: $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Ejercicio 2.5.5. *Muestre que si A de $n \times n$ es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

2.6. Matriz aumentada asociada a un sistema lineal y el método de Gauss-Jordan revisitado

De forma semejante a como definimos que un sistema lineal de ecuaciones $\mathcal{E}$ está en forma escalonada o forma escalonada reducida, podemos definir precisamente cuando una matriz E está en forma escalonada reducida (¡Trate de dar usted la definición precisa !). Si E es una matriz en forma escalonada reducida, en toda fila de E que no sea una cero-fila, su primera entrada distinta de cero es un uno. Recordemos que a este lo llamamos el *pivote* de la fila. Una matriz en forma escalonada reducida es, por ejemplo, la siguiente:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -7 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene cuatro pivotes.

De forma semejante a como definimos tres tipos de operaciones para las ecuaciones de un sistema, definimos los siguientes tres tipos de *operaciones elementales fila* para transformar una matriz A:

(1) $A \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} A'$]: Consiste en intercambiar las filas i-ésima y j-ésima.

(2) $A \xrightarrow{\lambda f_i} A'$]: Consiste en multiplicar la i-ésima fila de A por λ.

(3) $A \xrightarrow{\lambda f_i + f_j \mapsto f_j} A'$] Consite en multiplicar la i-ésima fila de A por λ, sumarla con la j-ésima fila y colocarla en la j-ésima fila.

A estas operaciones las llamaremos *operaciones elementales de tipo (1), (2)* o (3), respectivamente. Se puede demostrar por inducción el siguiente teorema. Omitiremos su demostración.

Teorema 2.6.1. *Toda matriz A de $m \times n$ se puede llevar por medio de operaciones elementales fila a una (¡única !) matriz R en forma escalonada reducida.*

Una demostración formal de este teorema se hace por inducción en el tamaño $m \times n$ de A.

A esta matriz R la llamamos "la" *forma escalonada reducida de A*.

Es claro que el teorema 1.5.4 que analiza el carácter de las solucines del sistema lineal general de m ecuaciones en n incógnitas, escrito en forma matricial por $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ se puede reescribir de la siguiente manera:

Teorema 2.6.2. *Sea $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ un sistema lineal de m ecuaciones en n incógnitas. Sea $M = [A|\bar{b}]$ la matriz aumentada asociada al sistema. Entonces:*

(1) El sistema es consistente si y sólo si las matrices A y M tienen el mismo número de pivotes en su forma escalonada reducida.

(2) Si el sistema es consistente y r denota el número de pivotes de A en su forma escalonada reducida, entonces $n - r$ es el número de variables independientes en el sistema en forma escalonada reducida equivalente a $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ y por tanto: A posee una única solución si y sólo si $r = n$.

Demostración. (1) es claro, pues la condición dada es equivalente a que el sistema de ecuaciones $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ en su forma escalonada reducida no tenga cero-ecuaciones enfrentadas a algo distinto de cero. (2) también es claro. □

2.7. Matrices Elementales

Ejemplo 2.7.1. *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Observe que de A se llega a $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ mediante la operación elemental fila $(-3)f_1 + f_2 \mapsto f_2$. Sea E la matriz de 2×2 a la que se llega de $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ usando <u>esta misma</u>*

operación elemental:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note ahora que

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A'$$

Definición 2.7.2. *Una* matriz elemental de $n \times n$ *es una que se obtiene de la identidad de* $n \times n$ *mediante una operación elemental fila. Diremos que la matriz elemental es de tipo (1), (2) o (3) dependiendo del tipo de la operacion elemental fila que se aplica a la matriz identidad para obtenerla.*

El ejemplo arriba ilustra un hecho más general que enunciamos en el siguiente teorema. Dejamos la demostración al lector. Es una demostración que tiene 3 casos.

Teorema 2.7.3. *Sea* A *una matriz de* $m \times n$*. Dada* E *una matriz elemental de* $m \times m$*, entonces* $E \cdot A$ *es la matriz que se obtiene de* A*, aplicándole aquella operación elemental fila que se le aplicó a la identidad* I_m *para obtener* E*.*

Corolario 2.7.4. *Si* E *es un matriz elemental, entonces* E *es invertible y su inversa* E' *es la matriz elemental que se obtiene de la identidad aplicando la operación elemental inversa a la que se usó para obtener* E*.*

Demostración. Suponga que $I \xrightarrow{\mathcal{E}} E$, $\mathcal{E}$ una cierta operación elemental fila. Sea $\mathcal{E}'$ la operación inversa de $\mathcal{E}$. Entonces $I \xrightarrow{\mathcal{E}} E \xrightarrow{\mathcal{E}'} I$. Aplicando el teorema obtenemos $I = E' \cdot E$. De igual forma como $I \xrightarrow{\mathcal{E}'} E' \xrightarrow{\mathcal{E}} I$, tenemos que $I = E \cdot E'$. Esto demuestra la afirmación del enunciado. $\square$

Recordando ahora el método de Gauss-Jordan o el teorema 2.6.1 obtenemos el siguiente:

Teorema 2.7.5. *Sea A una matrix de $m \times n$, entonces existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ de $m \times m$ y R matriz de $m \times n$ en forma escalonada reducida (unívocamente determinada) tal que*

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = R$$

Corolario 2.7.6. *Si A es matriz de $m \times n$, entonces existen matrices elementales $E'_1, E'_2, \ldots, E'_k$ y matriz R de $m \times n$ en forma escalonada reducida tal que*

$$A = E'_1 E'_2 \cdots E'_k R.$$

Podemos ahora demostrar un gran teorema que interrelaciona los conceptos vistos hasta ahora:

Teorema 2.7.7. *Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *A es invertible.*

(2) *$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ tiene solución única (aquí $\bar{b}$ es arbitrario pero fijo). ón.*

(3) *A se puede llevar por medio de operaciones elementales fila a la matriz identidad I de $n \times n$.*

(4) *A es igual a un producto de matrices elementales.*

Demostración. Demostramos que $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$, $(3) \Rightarrow (4)$ y $(4) \Rightarrow (1)$:

$(1) \Rightarrow (2)$: Si A es invertible es fácil ver que $A^{-1} \cdot \bar{b}$ es solución del sistema $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, puesto que

$$A \cdot (A^{-1} \cdot \bar{b}) = (A \cdot A^{-1}) \cdot \bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Por otro lado, esta es la única solución, ya que si $\bar{y}$ es otra solución, entonces $A \cdot \bar{y} = \bar{b}$ y multiplicando por A^{-1} a ambos lados de esta ecuación obtenemos $\bar{y} = A^{-1} \cdot \bar{b}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Suponga 2) y sea R la forma escalonada reducida (de $n \times n$) de A. Si R NO es la identidad I, entonces $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ tendría infinitas soluciones por la segunda parte del teorema 2.6.2 pues r el número de pivotes es menor que n.

(3) $\Rightarrow$ (4): Por el corlario arriba $A = F_1 F_2 \cdots F_k I$ para ciertas matrices elementales $F_1, \ldots, F_k$. Luego A es producto de matrices elementales.

(4) $\Rightarrow$ (1): Suponga que $A = F_1 \cdots F_k$ es producto de matrices elementales $F_1, \ldots, F_k$. Pero estas son invertibles, luego A es invertible y $A^{-1} = F_k^{-1} F_{k-1}^{-1} \cdots F_1^{-1}$.

□

Corolario 2.7.8. *Sea A matriz de $n \times n$. A es invertible si y sólo si existe C matriz de $n \times n$ tal que $C \cdot A = I$ (y en este caso C es la inversa de A).*

Demostración. La dirección "$\Rightarrow$" es clara. Supongo ahora que existe C tal que $C \cdot A = I$. Usando un argumento idéntico al de 1) $\Rightarrow$ 2) en el teorema, se puede mostrar que el sistema $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ tiene una única solución: $C \cdot \bar{b}$. Luego por el teorema, A es invertible. Ahora $C \cdot A = A^{-1} \cdot A$ implica $C = A^{-1}$, multiplicando por A^{-1} a la derecha. □

Corolario 2.7.9. *Sea A matriz de $n \times n$. A es invertible si y sólo si existe B de $n \times n$ tal que $A \cdot B = I$ (y en este caso $B = A^{-1}$).*

Demostración. Como $A \cdot B = I$, por el corolario anterior, B es invertible y $B^{-1} = A$. Pero ya habíamos demostrado que B^{-1} es invertible y que $(B^{-1})^{-1} = B$, luego $A^{-1} = B$. □

Por el teorema 2.7.7 tenemos que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y solamente si ella se puede llevar por medio de operaciones elementales fila a la matriz identidad. Ahora supongamos que A es efectivamente invertible y que $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$ son las operaciones elementales fila que si se aplican sucesivamente a A se llega a I. Sean $E_1, \ldots, E_k$ las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales fila $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$, entonces por 2.7.3

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 A = I$$

y por lo tanto

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

Entonces aplicando la generalización a la parte (2) del teorema 2.5.4 tenemos que:

$$A^{-1} = (E_k^{-1})^{-1} \cdots (E_2^{-1})^{-1} \cdot (E_1^{-1})^{-1} = E_k \cdots E_2 \cdots E_1,$$

y así

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot I.$$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema 2.7.3 iteradamente a esta igualdad y obtenemos que la inversa de A, A^{-1} se obtiene a partir de la identidad I mediante aplicaciones sucesivas de las operaciones elementales fila $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$. Este argumento justifica el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2.7.10. *Para decidir si una matriz cuadrada A es invertible y para encontrar su inversa en caso de que ésta exista, basta con considerar la matriz aumentada $(A|I)$ de $n \times 2n$, encontrar su forma escalonada reducida*

$(R|B)$ mediante el método de Gauss-Jordan y observar si R es la matriz identidad o no. Si R no es la identidad, podemos concluir que A no es invertible. Si R sí es la identidad, podemos concluir que A es invertible, que B es su inversa y que $B = E_k \cdots E_2 \cdot E_1$, donde $E_1, \dots, E_k$ son las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales fila $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ que se utilizaron para transformar $(A|I)$ en $(I|B)$.

Ejemplo 2.7.11. *Decidir si la matriz de 4×4*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible o no y en caso afirmativo encontrar su inversa.

Solución. Encontramos la forma escalonada reducida de la matriz aumentada $(A|I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\quad]{\substack{-3f_1 + f_3 \mapsto f_3 \\ -f_1 + f_4 \mapsto f_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & | & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\;]{\substack{f_2+f_3 \mapsto f_3 \\ -2f_2+f_4 \mapsto f_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -5 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-\frac{1}{5})f_3 \mapsto f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -5 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(-2)f_3+f_1 \mapsto f_1 \\ 6f_3+f_2 \mapsto f_2 \\ (-11)f_3+f_4 \mapsto f_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{11}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(\frac{5}{19})f_4 \mapsto f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{19} & \frac{11}{19} & \frac{1}{19} & \frac{5}{19} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(-\frac{3}{5})f_4+f_1 \mapsto f_1 \\ (\frac{4}{5})f_4+f_2 \mapsto f_2 \\ (\frac{4}{5})f_4+f_3 \mapsto f_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} & \frac{7}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{19} & -\frac{14}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{4}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{4}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{19} & \frac{11}{19} & \frac{1}{19} & \frac{5}{19} \end{array}\right)$$

Según el algoritmo podemos concluir que la matriz A es invertible y que su inversa es la matriz

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} & \frac{7}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{19} & -\frac{14}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{4}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{4}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{19} & \frac{11}{19} & \frac{1}{19} & \frac{5}{19} \end{array}\right)$$

Esta matriz la podemos expresar como el producto de 13 matrices elementales correspondientes a las 13 operaciones elementales filas utilizadas en la reducción de Gauss-Jordan recién llevada a cabo.

$\square$

Capítulo 3

Determinantes

3.1. Definición del Determinante

En este capítulo le asignaremos a cada matriz cuadrada A un número real que denotaremos por $det(A)$ y que llamaremos *determinante* de A. det es así una función que va del conjunto de todas las matrices cuadradas con entradas en los reales en el campo de los número reales $\mathbb{R}$.

$$det : \bigcup_{n=1}^{\infty} Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Definición 3.1.1. *Damos una definición inductiva de la función* det :

(i) Si $A = [a]$ *es de* 1×1, $det(A) = a$.

(ii) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *es una matriz de* 2×2, $det(A) = ad - bc$.

(iii) Suponga que A *es una matriz de* $n \times n$, *con* $n \geq 2$, *y suponga que la función det está YA definida para matrices cuadradas de MENOR*

tamaño, en particular para matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Defina entonces:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j} det(M_{1j}),$$

donde en general la matriz M_{ij} es la matriz que resulta de "tachar" en A la fila i-ésima y la columna j-ésima. M_{ij} es así una matriz de $(n-1) \times (n-1)$, a la cual llamamos el menor ij-ésimo *de A.*

Por notación, al determinante de una matriz A lo escribiremos como $|A|$. Así, $det(A) = |A|$ es un número real, y si A no es una matriz cuadrada, entonces NO tiene sentido escribir $|A|$.

Con la definición recién dada del determinante, es fácil crear un programa recursivo para que un computador "calcule" el determinante de cualquier matriz cuadrada. ¡Escríbalo!.

Ejemplo 3.1.2. *Calcule el determinante de la matriz de 4×4*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$det(A) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Para calcular el determinante de A, se deben calcular tres determinantes de 3×3:

- $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$
$(-1)(-1) = 1.$

- $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

- $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8.$

Así, $det(A) = 1 + 2(5) + 8 = 19.$ □

Un uso importante que haremos de la función determinante se deriva del siguiente teorema que probaremos más tarde:

Teorema 3.1.3. *Si A es una matriz cuadrara, A es invertible si y solo si* $\det(A) \neq 0$. *[Así, el determinante "determina" si una matriz es invertible o no, según sea distinto o igual a cero].*

Por tal razón, sabemos fácilmente que la matriz A del ejemplo anterior es invertible. Otro problema es calcular su inversa A^{-1}, lo cual se puede hacer mediante el algoritmo desarrollado en el capítulo anterior, o utilizando un procedimiento conocido como la *regla de Kramer*, que se puede encontrar en otros libros.

3.2. Propiedades del Determinante

Resumimos en el siguiente teorema las propiedades básicas de la función determinante:

Teorema 3.2.1. *1. Si I es la identidad de $n \times n$ $det(I) = 1$.*

2. Si A posee una cero-fila, $det(A) = 0$.

3. Si A' resulta de A mediante una operación elemental fila de tipo (1) (intercambiar dos filas), entonces $det(A') = (-1)det(A)$.

4. Si A' resulta de A multiplicando una de sus filas por λ (una operación elemental fila del tipo (2)), entonces $det(A') = \lambda det(A)$.

5. Si A' resulta de A mediante una operación elemental fila del tipo (3), entonces $det(A') = det(A)$.

Antes de abordar la demostración de estas propiedades, derivamos algunas consecuencias, que nos permitirán probar el teorema mencionado en la introducción de este capítulo.

Corolario 3.2.2. *Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y E una matriz elemental del tipo $(1), (2)$ o (3). Entonces $det(EA)$ es igual al determinante de A, $det(A)$, multiplicado por (-1), λ (un cierto real) o 1, dependiendo de si E es de tipo (1), (2) (utilizando el escalar λ) o (3) respectivamente.*

Demostración. Utilizando el teorema 2.7.3 sobre matrices elementales, este corolario no es más que una reformulación de $(3), (4)$ y (5) del teorema 3.2.1. □

Si en este corolario consideramos el caso especial en que $A = I$, obtenemos trivialmente el siguiente corolario:

Corolario 3.2.3. *Sea E una matriz elemental de tipo (1), (2) (utilizando el escalar λ) o (3). Entonces $det(E)$ es igual a (-1), λ o 1 respectivamente.*

Ahora aplicando varias veces el corolario 3.2.2, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2.4. *Sea $B = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k \cdot A$, donde cada E_i es una matriz elemental con $det(E_1) = e_i$ (recuerde que e_i es (-1), λ o 1, según el "tipo" de E_i). Entonces*

$$det(B) = \left(\prod_{i=1}^{k} e_i \right) det(A)$$

Tenemos ahora un "método complicado" para calcular el determinante de una matriz cuadrada A: utilizando las ideas del método de eliminación de Gauss-Jordan, encuentre matrices elementales $E_1, \cdots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = R \tag{3.1}$$

donde R es una matriz en forma escalonada reducida. ¡Recuerde que $R = I$ si y solo si A es invertible!. Este argumento que damos constituye evidentemente una demostración del teorema 3.1.3.

Ahora despejamos a A en 3.1 y obtenemos

$$A = E_1' E_2' \cdots E_k' R,$$

en donde cada E_i' es las inversa de E_i y por tanto también es una matriz elemental. Pero como R es una matriz cuadrada en forma escalonada reducida, tenemos dos casos:

Caso 1: $R = I$: esto sucede precisamente en el caso en que A es una matriz invertible, y entonces $det(R) = 1$ y utilizando el corolario obtenemos que $det(A)$ es el producto de ciertos reales $e_1', e_2', \ldots, e_k'$, todos distintos de cero pues cada e'_i es (-1), o $\lambda(\neq 0)$ o 1, dependiendo del tipo de E'_i. En este caso tenemos pues que $det(A) \neq 0$.

Caso 2: R posee cero-filas: esto sucede precisamente en el caso en que A es una matriz que NO es invertible, entonces según el teorema 3.2.1 (numeral 2), $det(R) = 0$ y de nuevo aplicando el corolario , obtenemos que en este caso $det(A) = 0$.

Queda así demostrado el teorema 3.1.3:

Una matriz cuadrada A es invertible si y solo si $det(A) \neq 0$.

Utilizando estas ideas podemos demostrar ahora de forma muy sencilla el siguiente teorema que expresa que las propiedades 1 a 5 en el teorema 3.2.1 acerca de la función determinante $det : \cup_{n=1}^{\infty} Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la determinan unívocamente.

Teorema 3.2.5. *Sea $\overline{det} : \cup_{n=1}^{\infty} Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función que satisface:*

(1') Si I es la identidad de $n \times n$ $\overline{det}(I) = 1$.

(2') Si A posee una cero-fila, $\overline{det}(A) = 0$.

(3') Si A' resulta de A mediante una operación elemental fila de tipo (1) *(intercambiar dos filas), entonces $\overline{det}(A') = (-1)\overline{det}(A)$.*

(4') Si A' resulta de A multiplicando una de sus filas por λ (una operación elemental fila del tipo (2)*), entonces $\overline{det}(A') = \lambda\overline{det}(A)$.*

(5') Si A' resulta de A mediante una operación elemental fila del tipo (3)*, entonces $\overline{det}(A') = \overline{det}(A)$.*

Entonces, para toda matriz A, $det(A) = \overline{det}(A)$.

Demostración. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Como ya hemos visto antes, existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_n$ y una matriz R en forma escalonada reducida tal que

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k \cdot R.$$

A cada E_i podemos asociar un número real e_i, que es $1, \lambda \neq 0$ ó -1 dependiendo de si E_i es una matriz elemental de tipo (1), (2) o (3) respectivamente. Como se mostró en el corolario 3.2, la identidad

$$det(A) = \left(\prod_{i=1}^{k} e_i \right) det(R)$$

es una consecuencia directa de las propiedades 3, 4 y 5 del teorema 3.2.1. De forma totalmente análoga se puede mostrar que de las propiedades (3'), (4') y (5') se sigue que

$$\overline{det}(A) = \left(\prod_{i=1}^{k} e_i \right) \overline{det}(R).$$

Pero como R es una matriz cuadrada en forma escalonada reducida, o bien $R = I$ o bien R posee una cero-fila. Utilizando (1), (2), (1') y (2') vemos que en cualquiera de los casos vale que

$$\overline{det}(R) = det(R).$$

Por lo tanto,

$$\overline{det}(A) = \left(\prod_{i=1}^{k} e_i \right) = det(A).$$

□

Note que la demostración del teorema 3.1.3 se obtuvo de forma relativamente sencilla utilizando únicamente las cinco propiedades del determinante enunciadas en el teorema 3.2.1. Mostramos a continuación, otra consecuencia sencilla de este teorema, a saber que la función determinante, *det*, es *multiplicativa*:

Teorema 3.2.6. *Sean A y B dos matrices cuadradas de $n \times n$. Entonces $det(AB) = det(A)det(B)$. [En palabras: "el determinante de un producto es el producto de los determinantes"].*

Demostración. Usando un argumento idéntico al utilizado arriba, podemos encontrar matrices elementales $E_1, \cdots, E_k, F_1, \cdots, F_l$ y dos matrices de $n \times n$ en forma escalonada reducida R_1, R_2 tales que

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k \cdot R_1 \text{ y } B = F_1 \cdot F_2 \cdots F_l \cdot R_2.$$

Sean e_i y f_j los reales (-1), $\lambda(\neq 0)$ o 1 asociados a E_i y F_j respectivamente, dependiendo de si estas son de tipo $(1), (2)$ o (3); es decir, sus determinantes (ver corolario 3.2.3)

Caso I: A es invertible y por tanto $R_1 = I$. Entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{k} e_i$, $det(B) = (\prod_{j=1}^{l} f_j)det(R_2)$. Note que $AB = E_1 \cdots E_k \cdot F_1 \cdots F_l \cdot R_2$ y por lo tanto

$$det(AB) = \left(\prod_{i=1}^{k} e_i \prod_{j=1}^{l} f_j \right) (det(R_2))$$

$$= (\prod_{i=1}^{k} e_i)(\prod_{j=1}^{l} f_j det(R_2)) = det(A)det(B).$$

Caso II: A no es invertible, y por lo tanto en R_1 por lo menos su última fila es una cero-fila. En este caso $det(A) = 0$ y $AB = (E_1 \cdots E_k)(R_1 F_1 \cdots F_l R_2)$. Asociamos de esta forma, pues queremos usar el siguiente hecho:

Ejercicio 3.2.7. *Si R es una matriz de $n \times n$ con una cero fila y M es cualquier otra matriz de $n \times n$, entonces RM posee también una cero-fila (¡la misma que la de R!).*

Utilizando el ejercicio vemos que $R_1 \cdot F_1 \cdots F_l \cdot R_2$ posee una cero-fila y por tanto su determinante es cero. Como $E_1 \cdots E_k$ es un matriz invertible, por ser producto de matrices elementales, podemos aplicar el caso I arriba y obtenemos que

$$\begin{aligned} det(AB) &= det((E_1 \cdots E_k)(R_1 F_1 \cdots F_l R_2)) \\ &= det(E_1 \cdots E_k) det(R_1 F_1 \cdots F_l R_2) \\ &= det(E_1 \cdots E_k) 0 = 0. \end{aligned}$$

Pero por otro lado $det(A)\ det(B) = 0\ det(B) = 0$. Esto termina la demostración.

□

Antes de pasar a la siguiente sección para demostrar las propiedades del determinante enunciadas en el teorema 3.2.1, daremos un ejemplo que ilustre algunas de ellas.

Ejemplo 3.2.8. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de la cual se mostró en el ejemplo 2.7.11 que se puede llevar por medio de operaciones elementales fila a la matriz identidad. Allí se mostró que utilizando dos operaciones elementales fila de tipo (3), A se transforma en la matriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Según la propiedad 3.2.1 (5) el determinante de esta matriz debería ser igual al determinante de A*, esto es a* 19*. Efectivamente:*

$$det(A_1) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

pero se ve fácilmente que los últimos dos sumandos son cero. ¡Mostraremos más tarde que el determinante de una matriz con una columna de ceros es cero! Así:

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-14) - (-5) = 19.$$

Ahora la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

se obtiene a partir de la matriz anterior, A_1*, intercambiando las filas segunda y tercera, una operación elemental fila de tipo (1). Según la propiedad 3.2.1(3),* $det(A_2) = -det(A_1) = -19$*. Efectivamente:*

$$
\begin{aligned}
det(A_2) &= 1\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 3 - (-6)(-3) + 4(-1) \ = \ 3 - 18 - 4 = 19.
\end{aligned}
$$

Como se ve en el ejemplo 2.7.11, de A_2 se llega a

$$
A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{pmatrix}
$$

mediante el uso de dos operaciones elementales de tipo (3). Se puede conprobar fácilmente que $det(A_3) = -19$.

Ahora, si multiplicamos la tercera fila de A_3 por el escalar $\lambda = -\frac{1}{5}$ obtenemos la matriz

$$
A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -frac45 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{pmatrix}
$$

Según la propiedad 3.2.1(4), deberíamos tener que $det(A_4) = (-\frac{1}{5})det(A_3) = \frac{19}{5}$. Efectivamente:

$$
det(A_4) = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 11 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -5 + \frac{44}{5} = \frac{-25+44}{5} = \frac{19}{5}
$$

Ejemplo 3.2.9. *Sea A la matriz del ejemplo anterior. Entonces*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos su determinante:

$$\begin{aligned} det(A^t) &= 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 3(7) - 3 \\ &= 19. \end{aligned}$$

En la siguiente sección mostraremos que en general vale que $det(A^t) = det(A)$.

3.3. Demostración de las propiedades del determinante

En esta sección daremos demostraciones para las propiedades básicas del determinante enunciadas en el teorema 3.2.1 y para algunas otras:

Teorema 3.3.1. *Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces:*

1. *Si A' resulta de A intercambiando las filas i y j ($i \neq j$), entonces $det(A') = (-1)det(A)$*

2. *Si A tiene dos filas iguales entonces $det(A) = 0$.*

3. *Si A' resulta de A, multiplicando la fila i-ésima por λ, entonces $det(A') = \lambda det(A)$.*

4. *Si A' resulta de A, multiplicando la fila i por λ, sumándosela a la j y colocando el resultado en la fila j, entonces $det(A') = det(A)$.*

Demostración. 1. Lo hacemos por inducción en n: suponemos que la afirmación es cierta para matrices de $(n-1)\times(n-1)$ y lo probamos para A una matriz de $n \times n$. Suponemos $1 \leq i < j \leq n$.

Caso 1: $i = 1, j = 2$.

$$\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}A_{1r}\ det(M_{1r}) \\
&= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}A_{1r}\left[\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^{1+s}A_{2s}\ det(M_{(1,2)(r,s)}) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{s=r+1}^{n}(-1)^{1+(s-1)}A_{2s}\ det(M_{(1,2)(r,s)})\right] \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^{2+r+s}\ A_{1r}A_{2s}\ det(M_{(1,2)(r,s)}) + \\
&\quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=r+1}^{n}(-1)^{1+r+s}A_{1r}A_{2s}det(M_{(1,2)(r,s)}).
\end{aligned}$$

Aqui $M_{(1,2)(r,s)}$ es la matriz de $(n-2)\times(n-2)$ que resulta de A al tachar las filas 1 y 2 y las columnas r y s.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
det(A') &= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{1+s}A_{2s}det(M'_{1s}) \\
&= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{1+s}A_{2s}\left[\sum_{r=1}^{s-1}(-1)^{1+r}A_{1r}\ det(M'_{(1,2)(s,r)})+\right. \\
&\quad \left.\sum_{r=s+1}^{n}(-1)^{1+(r-1)}a_{1r}det(M'_{(1,2)(s,r)})\right] \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{s-1}(-1)^{2+r+s}A_{1r}A_{2s}\ det(M_{(1,2)(r,s)})+ \\
&\quad \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=s+1}^{n}(-1)^{1+r+s}A_{1r}A_{2s}det(M_{(1,2)(r,s)})
\end{aligned}$$

Aquí $M'_{(1,2)(s,r)}$ es la matriz de $(n-2)\times(n-2)$ que resulta de A' al tachar las filas 1 y 2 y las columnas r y s. Por lo tanto $M'_{(1,2)(s,r)}$ es igual a $M_{(1,2)(s,r)}$. Ahora multiplicamos a ambos lados de la primera igualdad por (-1) y obtenemos

$$\begin{aligned}
(-1)\ det(A) &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^{1+r+s}A_{1r}A_{2s}\ det(M_{(1,2),(r,s)})+ \\
&\quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=r+1}^{n}(-1)^{2+r+s}A_{1r}A_{2s}\ det(M_{(1,2),(r,s)})
\end{aligned}$$

Observamos que en cada expresión aparece para cada r, s con $r \neq s$ el sumando $A_{1r}A_{2s}\ det(M_{(1,2)(r,s)})$ acompañado del coeficiente $(-1)^{2+r+s}$ o $(-1)^{1+r+s}$ dependiendo de si $r < s$ o si $r > s$. Por lo tanto las dos sumas son iguales y así $det(A') = (-1)det(A)$.

Caso 2: $i, j \geq 2$: en este caso las entradas de la primera fila de A', A'_{1r} y las entradas de la primera fila de A, A_{1r} son iguales. Por otro lado, por hipótesis de inducción tenemos que $det(M'_{1r}) = (-1)det(M_{1r})$. Por esto,

$$\begin{aligned} det(A') &= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}A'_{1r}\ det(M'_{1r}) \\ &= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}A_{1r}\ det(M_{1r}) \\ &= det(A) \end{aligned}$$

Caso 3: $i = 1, j > 2$. Considere las transformaciones elementales $A \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} B \xrightarrow{2\leftrightarrow j} B' \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} B''$. Claramente $B'' = A'$ y aplicando los casos 1 y 2 obtenemos $det(A') = (-1)det(B') = (-1)^2 det(B) = (-1)det(A)$. Con esto terminamos la demostración de (1).

2. Si A tiene las filas i y j iguales, entonces mediante la operación $i \leftrightarrow j$, $A' = A$, pero por (1) $det(A) = det(A') = -det(A)$, esto es posible solo si $det(A) = 0$.

3. Sea A' la matriz que resulta de A multiplicando la fila i-ésima de A por λ. Considere $A \xrightarrow{1\leftrightarrow i} B \xrightarrow{\lambda f_1} B' \xrightarrow{1\leftrightarrow i} B'' = A'$. Claramente

$$\begin{aligned} det(A') &= (-1)det(B') \\ &= (-1)\lambda det(B)(\text{Usa la definición}) \\ &= (-1)\lambda(-1)det(A) \\ &= \lambda det(A). \end{aligned}$$

4. Suponga que A' resulta de A, como se dice en el enunciado: Considere $A \xrightarrow{1\leftrightarrow j} B \xrightarrow{\lambda f_i + f_1 \mapsto f_1} B' \xrightarrow{1\leftrightarrow j} B'' = A'$. Usando la definición y (2) vemos que $det(B') = det(B)$, pues:

$$\begin{aligned} det(B') &= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}(B_{1r}+\lambda B_{ir})\ det(M_{1r}^{B}) \\ &= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}B_{1r}\ det(M_{1r}^{B})+\lambda\sum_{r=1}^{n}(-1)^{1+r}B_{ir}\ det(M_{1r}^{B}) \\ &= det(B)+0. \end{aligned}$$

La última sumatoria es el determinante de una matriz con la fila 1 y la fila i-ésima iguales y por lo tanto es 0.

Ahora: $det(A') = (-1)det(B') = (-1)det(B) = (-1)^2 det(A) = det(A)$.

□

Teorema 3.3.2. *Sea A de $n \times n$.*

1. *Si A tiene una 0-columna, $det(A) = 0$.*
2. *Si A es triangular inferior o superior, $det(A)$ es el producto de las entradas en la diagonal de A.*
3. *Si A es matriz diagonal $diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i$.*
4. *$det(I) = 1$.*

Ejercicio 3.3.3. *La demostración del anterior teorema es sencilla y se deja al lector.*

Teorema 3.3.4. *Sea A de $n \times n$.*

1. *$det(A^t) = det(A)$.*
2. *Si A es invertible, $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.*

Demostración. 1. Basta observar que la afirmación es cierta para matrices elementales y para matrices triangulares, y luego escribir $A = E_1 \cdots E_k R$, donde las E_i son matrices elementales y R esta en f.e.r.. $det(A^t) = det[(E_1 \cdots E_k R)^t] = det(R^t E_k^t \cdots E_1^t) = det(R^t) \cdots det(E_1^t) = det(E_1^t) \cdots det(R^t) = det(E_1) \cdots det(R)$ (por lo observado arriba) $= det(E_1 \cdots E_k R) = det(A)$.

2. Se deja al lector.

$\square$

Índice alfabético