MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202510, 31 de mayo de 2025

Ejercicio	1	2	3	4	5	**Total**
Pts	10	8	8	9	15	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagados y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y justifique por qué es aplicable.*

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 09:00-11:00 (120 min). **¡Éxitos!**

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[4 pts] (a) Encuentre los valores propios de A.

[3 pts] (b) Encuentre bases de los espacios propios de A y sus dimensiones.

[1 pts] (c) Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$.

[1 pts] (d) ¿Existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}AQ = D$?

[1 pts] (e) ¿Es A invertible?

Ejercicio 2. En $\mathbb{R}^3$, considere el punto $P(3, 2, 5)$ y la recta L

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1 pts] (a) Demuestre que $P \notin L$.

[4 pts] (b) Encuentre un plano E que contenga la recta L y el punto P.

[3 pts] (c) Encuentre un plano F que contenga P pero que no interseque la recta L. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. Sean k, a números reales y considere la ecuación

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 2k+1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

[5 pts] (a) Determine todos los parametros k y a tal que el sistema $(*)$ tenga una única solución. (No es necesario encontrar la solución para (x, y, z).)

[3 pts] (b) Determine todos los parametros k y a tal que el sistema $(*)$ tenga ninguna solución. Determine todos los parametros k y a tal que el sistema $(*)$ tenga infinitas soluciones. (No es necesario encontrar las soluciones para (x, y, z).)

Ejercicio 4. Sea $M_{2\times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con entradas reales y sea P_2 el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2.

Considere la transformación

$$T : M_{2\times 2} \to P_2, \qquad T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + 2b + 3d)X^2 + (c + 4d)X + 4a + 8b - 3c.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal.

[4 pts] (a) Encuentre una base para el kernel de T y encuentre la dimensión del kernel de T.

[4 pts] (b) Encuentre una base para la imagen de T y encuentre la dimensión del imagen de T.

[1 pts] (c) Encuentre un polinomio p en la imagen de T con $p(0) = 2$.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

[3 pts] (a) En una competencia, los atletas senior deben correr 2 km, nadar 400 metros y andar en bicicleta 13 km. Los atletas junior deben correr 1.5 km, nadar 300 metros y andar en biciceta 8 km. Escriba una ecuación de la forma $M\vec{x} = \vec{b}$ donde M es una matriz y $\vec{x}$ y $\vec{b}$ son vectores que para un equipo conformado por S atletas senior y J atletas junior permite calcular las distancias que este equipe corre, nada y anda en bicicleta. Diga claramente qué significan las entradas en los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.
No es necesario hacer cálculos.

[3 pts] (b) Sea $T : P_2 \to P_4,\ Tp(x) = 2p'(x) + x^2 p(x)$. Demuestre que T es una transformación lineal.

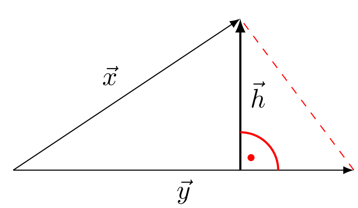
[3 pts] (c) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.
Encuentre una base ortogonal de $U = \operatorname{gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$.

[4 pts] (d) Sea $T : \mathbb{R}^5 \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal con imagen $\operatorname{Im} T = \operatorname{gen}\{A, B, C\}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\dim(\operatorname{Im} T)$ y $\dim(\ker T)$.

[2 pts] (e) Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea el vector $\vec{h}$ como en el bosquejo. Escriba $\vec{h}$ en términos de $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\operatorname{proy}_{\vec{x}} \vec{y}$, $\operatorname{proy}_{\vec{y}} \vec{x}$.



MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202510, 31 de mayo de 2025

Ejercicio	1	2	3	4	5	**Total**
Pts	10	8	8	9	15	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagados y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y justifique por qué es aplicable.*

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 09:00-11:00 (120 min). **¡Éxitos!**

Ejercicio 1. Sea Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[4 pts] (a) Encuentre los valores propios de A.

[3 pts] (b) Encuentre bases de los espacios propios de A y sus dimensiones.

[1 pts] (c) Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$.

[1 pts] (d) ¿Existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}AQ = D$?

[1 pts] (e) ¿Es A invertible?

Ejercicio 2. En $\mathbb{R}^3$, considere el punto $P(4,-1,2)$ y la recta L

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1 pts] (a) Demuestre que $P \notin L$.

[4 pts] (b) Encuentre un plano E que contenga la recta L y el punto P.

[3 pts] (c) Encuentre un plano F que contenga P pero que no interseque la recta L. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. Sean k, a números reales y considere la ecuación

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ k+1 & 3 & 3k-1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

[5 pts] (a) Determine todos los parametros k y a tal que el sistema $(*)$ tenga una única solución. (No es necesario encontrar la solución para (x, y, z).)

[3 pts] (b) Determine todos los parametros k y a tal que el sistema $(*)$ tenga ninguna solución.
Determine todos los parametros k y a tal que el sistema $(*)$ tenga infinitas soluciones.
(No es necesario encontrar las soluciones para (x, y, z).)

Ejercicio 4. Sea $M_{2\times2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con entradas reales y sea P_2 el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2.

Considere la transformación

$$T : M_{2\times2} \to P_2, \qquad T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + 3c + 4d)X^2 + (b + 5d)X + 2a - b + 6c + 3d.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal.

[4 pts] (a) Encuentre una base para el kernel de T y encuentre la dimensión del kernel de T.

[4 pts] (b) Encuentre una base para la imagen de T y encuentre la dimensión del imagen de T.

[1 pts] (c) Encuentre un polinomio p en la imagen de T con $p(0) = 3$.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

[3 pts] (a) En una competencia hay tres circuitos de distancias diferentes: Los atletas senior deben correr 4 veces el ciruito rojo, 1 vez el circuito verde y 2 veces el circuito azul. Los atletas junior deben correr 2 veces el ciruito rojo, 3 veces el circuito verde y 1 vez el circuito azul. Escriba una ecuación de la forma $M\vec{x} = \vec{b}$ donde M es una matriz y $\vec{x}$ y $\vec{b}$ son vectores que permite calcular la distancia total que recorre un atleta senior y la distancia total que recorre un atleta junior si el circuito rojo tiene R metros, el circuito verde tiene V metros, y el circuito azul tiene A metros. Diga claramente qué significan las entradas en los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.
No es necesario hacer cálculos.

[3 pts] (b) Sea $T : P_2 \to P_3,\ Tp(x) = 3xp(x) + p'(x)$. Demuestre que T es una transformación lineal.

[3 pts] (c) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.
Encuentre una base ortogonal de $U = \text{gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$.

[4 pts] (d) Sea $T : \mathbb{R}^6 \to M_{2\times2}$ una transformación lineal con imagen $\operatorname{Im} T = \text{gen}\{A, B, C\}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\dim(\operatorname{Im} T)$ y $\dim(\ker T)$.

[2 pts] (e) Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea el vector $\vec{h}$ como en el bosquejo. Escriba $\vec{h}$ en términos de $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\text{proy}_{\vec{x}}\,\vec{y}$, $\text{proy}_{\vec{y}}\,\vec{x}$.