MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202420, 02 de diciembre de 2024

Nombre: ____________________ Código: ____________

Ejercicio	1	2	3	4	5	**Total**
Pts	8	10	10	10	12	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagado y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cúal es y justifique por qué es aplicable.*

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 15:00-17:00 (120 min). **¡Éxitos!**

Ejercicio 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$. Defina el conjunto

$$W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}.$$

[3 pts] (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal de W.

[3 pts] (b) Encuentre una base para W y su dimensión $\dim W$.

[2 pts] (c) Para $\vec{a}$ y $\vec{b}$, diga si pertenecen a $W^\perp$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2. Considere la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

[4 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tiene una única solución.

[6 pts] (b) Encuentre la inversa de la matriz en $(*)$ para $k = 0$ y encuentre la solución de $(*)$.

continua atrás

Ejercicio 3. Sea P_3 el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 3 y considere la transformación

$$T : P_3 \to \mathbb{R}^2, \qquad Tp = \begin{pmatrix} p(1) + p(-1) \\ p'(1) + p'(-1) \end{pmatrix}.$$

En P_3 consideramos la base $\mathcal{B} = \{p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4\}$ donde

$$p_1(x) = x^3 + x^2,\ \ p_2(x) = x^3 + 1,\ \ p_3(x) = x,\ \ p_4(x) = x - 1.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal y que $\mathcal{B}$ es una base para P_3.

[3 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ para P_3 y la base canónica para $\mathbb{R}^2$.

[3 pts] (b) Encuentre una base para el kernel $\ker T$ y su dimensión.

[3 pts] (c) Encuentre una base para la imagen $\operatorname{Im} T$ y su dimensión.

[1 pts] (d) Diga si el polinomio $r(x) = x^2$ pertenece al kernel de T.

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[6 pts] (a) Encuentre los valores propios de A y encuentre una base para cada espacio propio de A.

[3 pts] (b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$.

[1 pts] (c) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}AQ = D$.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

[2 pts] (a) Encuentre la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ al plano $E : 2x - y + 3z = 0$.

[2 pts] (b) Sean A, B matrices 3×3 con $\det A = 5$ y $\det B = 6$. Encuentre $\det(3AB^{-1})$.

[2 pts] (c) Diga si es verdad y justifique su respuesta: Toda matriz invertible es simétrica.

[2 pts] (d) Diga si el conjunto $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 + 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

[2 pts] (e) Diga si la siguiente transformación es lineal y justifique su respuesta.

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad S \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| - y \\ z + y \end{pmatrix}.$$

[2 pts] (f) Suponga que un sistema lineal inhomogéneo $n \times n$ es inconsistente. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo asociado?

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202420, 02 de diciembre de 2024

NOMBRE: ________________________________ CÓDIGO: _______________

Ejercicio	1	2	3	4	5	**Total**
Pts	8	10	10	10	12	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagado y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cúal es y justifique por qué es aplicable.*

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 15:00-17:00 (120 min). **¡Éxitos!**

Ejercicio 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, vectores en $\mathbb{R}^4$. Defina el conjunto

$$W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}.$$

[3 pts] (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal de W.

[3 pts] (b) Encuentre una base para W y su dimensión $\dim W$.

[2 pts] (c) Para $\vec{a}$ y $\vec{b}$, diga si pertenecen a $W^\perp$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2. Considere la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k-3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

[4 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tiene una única solución.

[6 pts] (b) Encuentre la inversa de la matriz en $(*)$ para $k = 0$ y encuentre la solución de $(*)$.

continua atrás

Ejercicio 3. Sea P_3 el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 3 y considere la transformación

$$T : P_3 \to \mathbb{R}^2, \qquad Tp = \begin{pmatrix} p(1) - p(-1) \\ p''(0) + 2p(0) \end{pmatrix}.$$

En P_3 consideramos la base $\mathcal{B} = \{p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4\}$ donde

$$p_1(x) = x^3 - x^2,\ p_2(x) = x^2 - x,\ p_3(x) = x^2,\ p_4(x) = x - 3.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal y que $\mathcal{B}$ es una base para P_3.

[3 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ para P_3 y la base canónica para $\mathbb{R}^2$.

[3 pts] (b) Encuentre una base para el kernel $\ker T$ y su dimensión.

[3 pts] (c) Encuentre una base para la imagen $\operatorname{Im} T$ y su dimensión.

[1 pts] (d) Diga si el polinomio $q(x) = x^3$ pertenece al kernel de T.

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

[6 pts] (a) Encuentre los valores propios de A y encuentre una base para cada espacio propio de A.

[3 pts] (b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$.

[1 pts] (c) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}AQ = D$.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

[2 pts] (a) Encuentre la distancia del punto $P(3, 1, 1)$ al plano $E : x - 3y + 2z = 0$.

[2 pts] (b) Sean A, B matrices 3×3 con $\det A = 3$ y $\det B = 4$. Encuentre $\det(\frac{1}{2}A^{-1}B)$.

[2 pts] (c) Diga si es verdad y justifique su respuesta: Toda matriz simétrica es invertible.

[2 pts] (d) Diga si la siguiente transformación es lineal y justifique su respuesta.

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y + |z| \end{pmatrix}.$$

[2 pts] (e) Diga si el conjunto $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 + 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

[2 pts] (f) Suponga que un sistema lineal inhomogéneo $n \times n$ es inconsistente. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo asociado?