MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 202320, 09 de diciembre de 2023

Nombre: ______________________ Código: ____________ Sec. Compl.: ______

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Este es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón y hasta que haya entregado el examen y salido del salón.

Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.

Tiempo: 15:00-17:00 (120 min).

¡Éxito!

En este examen, usamos la siguiente notación:

- $M_{m\times n}$ = el espacio de todas las matrices reales con m filas y n columnas,
- P_n = el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n,
- $\ker T$ = el kernel (núcleo) de la transformación lineal T,
- $\operatorname{Im} T$ = la imagen de la transformación lineal T.

Problema 1. Para un parámetro real k considere la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & k & -7 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que la matriz A_k **no** es invertible.

4 pts. (b) Encuentre la matriz inversa de A_5, es decir, la inversa de la matriz A_k con $k = 5$.

Problema 2. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre los valores propios de B.

4 pts. (b) Encuentre bases para los espacios propios de B y sus dimensiones.

2 pts. (c) Encuentre una matriz invertible U y una matriz diagonal D tal que $U^{-1}BU = D$.

Problema 3. Considere

$$T : P_2 \to M_{2\times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} p(0) + p'(0) & p'(1) \\ p'(2) - p(2) & 0 \end{pmatrix}.$$

4 pts. (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

3 pts. (b) Encuentre la dimensión de $\ker T$.

3 pts. (c) Encuentre la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

Problema 4. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{array}{c} x - 2y + 3z + 2w = 0, \\ x + y - 9z - 4w = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ y sea $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Sin prueba puede usar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre $\dim H$.

4 pts. (b) Encuentre una base ortonormal para H.

3 pts. (c) Encuentre una base para $H^\perp$.

2 pts. (d) Escriba $\vec{a}$ como suma $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$ donde $\vec{u}$ pertenece a H y $\vec{w}$ es perpendicular a H.

2 pts. (e) Denotamos por P_H la proyección ortogonal sobre H. Encuentre un vector $\vec{b}$ diferente de $\vec{a}$ tal que $P_H\vec{b} = P_H\vec{a}$.

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

3 pts. (a) Sea $T : P_7 \to M_{2\times 3}$ una transformación lineal tal que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \operatorname{Im}(T).$$

¿Es posible que $\dim(\ker(T)) = 7$?

3 pts. (b) Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

Sea E el plano generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y sea $L = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. ¿Es cierto que E es ortogonal a L?

3 pts. (c) Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$. ¿Se sigue que A es invertible?

MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 202320, 09 de diciembre de 2023

Nombre: ________________________ Código: ______________ Sec. Compl.: ______

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Este es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón y hasta que haya entregado el examen y salido del salón.
Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 15:00-17:00 (120 min).

¡Éxito!

En este examen, usamos la siguiente notación:

- $M_{m\times n}$ = el espacio de todas las matrices reales con m filas y n columnas,
- P_n = el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n,
- $\ker T$ = el kernel (núcleo) de la transformación lineal T,
- $\operatorname{Im} T$ = la imagen de la transformación lineal T.

Problema 1. Para un parámetro real k considere la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & k & -1 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que la matriz A_k **no** es invertible.

4 pts. (b) Encuentre la matriz inversa de A_3, es decir, la inversa de la matriz A_3 con $k = 3$.

Problema 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre los valores propios de A.

4 pts. (b) Encuentre bases para los espacios propios de A y sus dimensiones.

2 pts. (c) Encuentre una matriz invertible U y una matriz diagonal D tal que $U^{-1}AU = D$.

Problema 3. Considere

$$T : P_2 \to M_{2\times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} 0 & p'(0) - p''(0) \\ p(1) & 2p''(0) - p'(1) \end{pmatrix}.$$

4 pts. (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

3 pts. (b) Encuentre la dimensión de $\ker T$.

3 pts. (c) Encuentre la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

Problema 4. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{array}{r} x + 2y - 6z + 2w = 0, \\ x - y + 9z - 4w = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ y sea $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Sin prueba puede usar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre $\dim H$.

4 pts. (b) Encuentre una base ortonormal para H.

3 pts. (c) Encuentre una base para $H^\perp$.

2 pts. (d) Escriba $\vec{a}$ como suma $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$ donde $\vec{u}$ pertenece a H y $\vec{w}$ es perpendicular a H.

2 pts. (e) Denotamos por P_H la proyección ortogonal sobre H. Encuentre un vector $\vec{b}$ diferente de $\vec{a}$ tal que $P_H\vec{b} = P_H\vec{a}$.

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

3 pts. (a) Sea $T : M_{3\times 2} \to P_7$ una transformación lineal tal que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \ker(T).$$

¿Es posible que $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 5$?

3 pts. (b) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

Sea E el plano generado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y sea $L = \{t\vec{a} : t \in \mathbb{R}\}$. ¿Es cierto que E es ortogonal a L?

3 pts. (c) Sea A una matriz simétrica $n \times n$. ¿Se sigue que A es invertible?