MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 202210, 01 de junio de 2022

Nombre: ______________________ Código: __________

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Este es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo salvo la hoja con fórmulas autorizada. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas, relojes inteligentes, etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón y hasta que haya entregado el examen y salido del salón.
Debe presentar su respuesta de forma clara y ordenada *con todo el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja adicional que haya utilizado. Tiempo: 09:00-11:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Sea $E: 2x - y + 3z = 0$ un plano en $\mathbb{R}^3$ y sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2 pts. (a) Encuentre la ecuación para el plano que pasa por el punto $(9, 2, 4)$ y es paralelo a E.
3 pts. (b) Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto $(9, 2, 4)$ y es perpendicular a E.
3 pts. (c) Encuentre vectores $\vec{a}$ en E y $\vec{b}$ perpendicular a E tal que $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.
2 pts. (d) Encuentre la distancia del punto $(9, 2, 4)$ al plano E.

Problema 2. Para los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ defina el plano $E = \text{gen}\{\vec{v},\ \vec{w}\}$ generado por ellos en $\mathbb{R}^3$. Con T denotamos la reflexión con respecto a este plano.

2 pts. (a) Encuentre un vector normal $\vec{n}$ para el plano E.
2 pts. (b) Encuentre $T\vec{v}$, $T\vec{w}$ y $T\vec{n}$.
3 pts. (c) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{\vec{v},\ \vec{w},\ \vec{n}\}$.
3 pts. (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6 pts. (a) Encuentre todos los valores propios de la matriz A y dé bases para sus espacios propios.
4 pts. (b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ^{-1}$. (No es necesario calcular Q^{-1}.)

Problema 4. Para $k \in \mathbb{R}$ defina la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & k & 0 \\ 3 & k & 2 \end{pmatrix}$ y sea $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (a) Encuentre todos los k para los que A_k no es invertible y todos los k para los que sí es invertible.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (b) Tome $k = 0$ y encuentre A_0^{-1}.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (c) Encuentre todas las soluciones de $A_0\vec{x} = \vec{b}$.

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (a) Encuentre dos matrices 2×2 diferentes que satisfacen $\det(3AA^tA^{-1}) = 7$.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (b) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que no pertence a al espacio gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\text{3 pts.}}$ (c) Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuyo kernel es gen $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\text{3 pts.}}$ (d) Sea V un espacio vectorial y suponga que los vectores a, b, c son linealmente independientes en V. Definamos $x = 2a,\ y = a + b + c, z = b + c$. Encuentre $\dim(\text{gen}\{x, y, z\})$.

MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 202210, 01 de junio de 2022

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Este es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo salvo la hoja con fórmulas autorizada. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas, relojes inteligentes, etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón y hasta que haya entregado el examen y salido del salón.

Debe presentar su respuesta de forma clara y ordenada *con todo el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja adicional que haya utilizado. Tiempo: 09:00-11:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Sea $E: 3x - 2y - z = 0$ un plano en $\mathbb{R}^3$ y sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 pts. (a) Encuentre la ecuación para el plano que pasa por el punto $(-5, 6, 1)$ y es paralelo a E.

3 pts. (b) Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto $(-5, 6, 1)$ y es perpendicular a E.

3 pts. (c) Encuentre vectores $\vec{a}$ en E y $\vec{b}$ perpendicular a E tal que $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

2 pts. (d) Encuentre la distancia del punto $(-5, 6, 1)$ al plano E.

Problema 2. Para los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ defina el plano $E = \text{gen}\{\vec{v},\ \vec{w}\}$ generado por ellos en $\mathbb{R}^3$. Con T denotamos la reflexión con respecto a este plano.

2 pts. (a) Encuentre un vector normal $\vec{n}$ para el plano E.

2 pts. (b) Encuentre $T\vec{v}$, $T\vec{w}$ y $T\vec{n}$.

3 pts. (c) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{\vec{v},\ \vec{w},\ \vec{n}\}$.

3 pts. (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6 pts. (a) Encuentre todos los valores propios de la matriz A y dé bases para sus espacios propios.

4 pts. (b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ^{-1}$. (No es necesario calcular Q^{-1}.)

Problema 4. Para $k \in \mathbb{R}$ defina la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ k & k & 3 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (a) Encuentre todos los k para los que A_k no es invertible y todos los k para los que sí es invertible.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (b) Tome $k = 0$ y encuentre A_0^{-1}.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (c) Encuentre todas las soluciones de $A_0\vec{x} = \vec{b}$.

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (a) Encuentre dos matrices 2×2 diferentes que satisfacen $\det(5A^{-1}A^tA) = 3$.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (b) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que no pertence a al espacio gen $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\text{3 pts.}}$ (c) Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen es gen $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\text{3 pts.}}$ (d) Sea V un espacio vectorial y suponga que los vectores a, b, c son linealmente independientes en V. Definamos $x = a + b - 4c$, $y = a + b + c$, $z = 3c$. Encuentre $\dim(\text{gen}\{x, y, z\})$.