MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201920, 09 de diciembre de 2019

Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

Problema 1. Considere la matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ y defina $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : S\vec{x} = \vec{0}\}$.

4 pts. (a) Encuentre $\dim V$ y una base de V.

4 pts. (b) Encuentre una base del espacio columna de S y calcule su dimensión.

Problema 2. Sea $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Calcule TT^t y $\det T$.

2 pts. (b) La matriz T representa una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ en la base canónica. Descríbala geométricamente.

4 pts. (c) Sea Δ el triangulo con vertices $P(0,0)$, $Q(-1,0)$ y $R(0,1)$. Haga un bosquejo de Δ y de su imagen bajo T. Encuentre los ángulos formados por los lados de la imagen de Δ.

Problema 3. Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, vectores en $\mathbb{R}^4$ y sea $U = \text{gen}\{\vec{x}, \vec{y}\}$ el subespacio vectorial generado por $\vec{x}$ y $\vec{y}$.

4 pts. (a) Encuentre una base ortonormal de U.

2 pts. (b) Encuentre la proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre U.

2 pts. (c) Encuentre la distancia del punto con vector posición $\vec{a}$ al subespacio U.

Problema 4. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que A_k es invertible.

4 pts. (b) Sea $k = 0$. calcule A_0^{-1}.

Problema 5. Sea $B_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$ para $k \in \mathbb{R}$.

2 pts. (a) Encuentre todos los valores propios de la matriz B_k.

4 pts. (b) Tome $k = 3$. Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tales que $B_3 = CDC^{-1}$. (No es necesario calcular C^{-1}.)

4 pts. (c) Encuentre un $k \in \mathbb{R}$ tal que B_k **no** sea diagonalizable. Justifique su respuesta.

Problema 6. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

2 pts. (a) Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y defina $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{v}$. ¿Es 0 un valor propio de T?

2 pts. (b) Sea L la recta $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. ¿El punto $P(4,3,2)$ pertenece a L?

2 pts. (c) Sea A una matriz $n \times n$. Se sabe que su polinomio característico es $p(x) = -x^7 + 3x - 5$. ¿Cuál es el valor de n? ¿Es A invertible?

Examen Final 201920, 09 de diciembre de 2019

<u>Tiempo:</u> 12:00-14:00 (120 min).

Problema 1. Considere la matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ y defina $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : R\vec{x} = \vec{0}\}$.

4 pts. (a) Encuentre $\dim V$ y una base de V.

4 pts. (b) Encuentre una base del espacio columna de R y calcule su dimensión.

Problema 2. Sea $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Calcule T^tT y $\det T$.

2 pts. (b) La matriz T representa una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ en la base canónica. Descríbala geométricamente.

4 pts. (c) Sea Δ el triangulo con vertices $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,-1)$. Haga un bosquejo de Δ y de su imagen bajo T. Encuentre los ángulos formados por los lados de la imagen de Δ.

Problema 3. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, vectores en $\mathbb{R}^4$ y sea $W = \text{gen}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ el subespacio vectorial generado por $\vec{a}, \vec{b}$.

4 pts. (a) Encuentre una base ortonormal de W.

2 pts. (b) Encuentre la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre W.

2 pts. (c) Encuentre la distancia del punto con vector posición $\vec{x}$ al subespacio W.

Problema 4. Sea $B_k = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que B_k es invertible.

4 pts. (b) Sea $k = 0$. calcule B_0^{-1}.

Problema 5. Sea $A_k = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ para $k \in \mathbb{R}$.

2 pts. (a) Encuentre todos los valores propios de la matriz A_k.

4 pts. (b) Tome $k = 4$. Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tales que $A_4 = CDC^{-1}$. (No es necesario calcular C^{-1}.)

4 pts. (c) Encuentre un $k \in \mathbb{R}$ tal que A_k **no** sea diagonalizable. Justifique su respuesta.

Problema 6. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

2 pts. (a) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y defina $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T\vec{x} = \vec{w} \times \vec{x}$. ¿Es 0 un valor propio de T?

2 pts. (b) Sea L la recta $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. ¿El punto $P(2,1,0)$ pertenece a L?

2 pts. (c) Sea A una matriz $n \times n$. Se sabe que su polinomio característico es $p(x) = x^6 + 2x^2 - 7x$. ¿Cuál es el valor de n? ¿Es A invertible?