MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201910, 25 de mayo de 2019

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

Problema 1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

Sea $V = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

3 pts. (a) Demuestre que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortogonal de V y complételа con un vector $\vec{v}_3$ a una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

3 pts. (b) Encuentre una base de $V^\perp$ y diga qué representan V y $V^\perp$ geométricamente.

3 pts. (c) Encuentre un vector $\vec{b}$ perpendicular a V y un vector $\vec{c}$ paralelo a V tal que $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

3 pts. (d) Escriba $\vec{a}$ con respecto a la base encontrada en el literal (b).

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \to P_2, \qquad T(p(x)) = P(x+3) - P(x).$$

2 pts. (a) Muestre que T es una transformación lineal.

5 pts. (b) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$.

2 pts. (c) Encuentre la dimensión del kernel $\ker(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\ker(T)$.

2 pts. (d) Encuentre la dimensión de $\text{Im}(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\text{Im}(T)$.

Problema 3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 pts. (a) Demuestre que $\vec{x}$ es un vector propio de la matriz A y diga cuál es el valor propio correspondiente.

2 pts. (b) Demuestre que -2 es un valor propio de la matriz A.

3 pts. (c) Calcule bases de los espacios propios de la matriz A y sus dimensiones.

3 pts. (d) Calcule bases ortonormales de los espacios propios de la matriz A.

2 pts. (e) Encuentre una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$.

Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

3 pts. (a) En $\mathbb{R}^3$ considere la recta $L : x = 2t+2$, $y = -t+3$, $z = 3t-5$ con $t \in \mathbb{R}$. Encuentre dos planos π_1 y π_2 que no intersequen a L. Justifique su respuesta.

3 pts. (b) Sea L la recta del literal (a). Encuentre otra recta G que **no** sea parelela a L y que no interseque a L. Justifique su respuesta.

3 pts. (c) Sea $A \in M_{3\times 3}$ con $\det A = 5$. Encuentre una matriz $B \in M_{3\times 3}$ tal que $\det(4A^{-1}B^2) = 4$.

3 pts. (d) De una transformación lineal $T : M_{2\times 4} \to \mathbb{R}^{11}$ se sabe que $\dim(\ker(T)) = 2$. Halle $\dim(\text{Im}(T))$.

3 pts. (e) Sea M una matriz $n \times n$. Suponga que existe un vector $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $M\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $M\vec{x} = \vec{0}$? ¿Por qué?

MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201910, 25 de mayo de 2019

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

Problema 1. Considere los vectores $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

Sea $W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

3 pts. (a) Demuestre que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base ortogonal de W y complétela con un vector $\vec{w}_3$ a una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

3 pts. (b) Encuentre una base de $W^{\perp}$ y diga qué representan W y $W^{\perp}$ geométricamente.

3 pts. (c) Encuentre un vector $\vec{y}$ perpendicular a W y un vector $\vec{z}$ paralelo a W tal que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

3 pts. (d) Escriba $\vec{x}$ con respecto a la base encontrada en el literal (b).

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \to P_2, \qquad T(p(x)) = P(x) - P(x-5).$$

2 pts. (a) Muestre que T es una transformación lineal.

5 pts. (b) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$.

2 pts. (c) Encuentre la dimensión del kernel $\ker(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\ker(T)$.

2 pts. (d) Encuentre la dimensión de $\text{Im}(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\text{Im}(T)$.

Problema 3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2 pts. (a) Demuestre que $\vec{x}$ es un vector propio de la matriz A y diga cuál es el valor propio correspondiente.

2 pts. (b) Demuestre que 1 es un valor propio de la matriz A.

3 pts. (c) Calcule bases de los espacios propios de la matriz A y sus dimensiones.

3 pts. (d) Calcule bases ortonormales de los espacios propios de la matriz A.

2 pts. (e) Encuentre una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$.

Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

3 pts. (a) En $\mathbb{R}^3$ considere la recta $L : x = t + 3$, $y = 2t - 5$, $z = 3t + 1$ con $t \in \mathbb{R}$. Encuentre dos planos π_1 y π_2 que no intersequen a L. Justifique su respuesta.

3 pts. (b) Sea L la recta del literal (a). Encuentre otra recta H que **no** sea parelela a L y que no interseque a L. Justifique su respuesta.

3 pts. (c) Sea $R \in M_{3\times 3}$ con $\det R = 4$. Encuentre una matriz $S \in M_{3\times 3}$ tal que $\det(2SR^tS) = 14$.

3 pts. (d) De una transformación lineal $T : \mathbb{R}^7 \to M_{4\times 3}$ se sabe que $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. Halle $\dim(\ker(T))$.

3 pts. (e) Sea A una matriz $n \times n$. Suponga que existe un vector $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $A\vec{x} = \vec{0}$? ¿Por qué?