Universidad de Los Andes — Álgebra lineal 1

# Parcial 3 - Tema A

26 de octubre 2013 — MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

*Cada pregunta vale 2 puntos.*

### Ejercicio I

Se considera la aplicación $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 3y + 3z, 3y + 4z) \end{array}$.

**1.** Muestre que $T$ es una aplicación lineal y halle la matriz de $T$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ (es decir, la representación matricial de $T$).

**2.** Halle una base del núcleo de $T$.

**3.** Halle una base de la imagen de $T$.

### Ejercicio II

Sea $R$ la recta de $\mathbb{R}^3$ generada por el vector $v_1 = (1, 2, -1)$ y consideremos el vector $w = (1, 6, 1)$.

**1.** Halle la proyección ortogonal de $w$ a $R$.

**2.** Sea $R^\perp$ el complemento ortogonal de $R$ en $\mathbb{R}^3$. Halle la proyección ortogonal de $w$ a $R^\perp$.

**3.** Halle una base de $R^\perp$.

### Ejercicio III

Sea $F \subset \mathbb{R}^3$ el espacio de columnas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Se denotan $v_1$ y $v_2$ los vectores columnas de $A$.

**1.** Muestre que la familia $(v_1, v_2)$ es una base ortonormal de $F$.

**2.** Halle la proyección ortogonal a $F$ del vector $w = (1, 0, 1)$.

### Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

**1.** Sea $E = C([-\pi; \pi]; \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas $f : [-\pi; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, dotado con el producto escalar euclidiano $(f|g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$. Entonces la familia $(1, \operatorname{sen} t)$ es una familia ortogonal de $E$.

**2.** Sea $R$ la recta de ecuación $x + y = 0$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces la proyección ortogonal a $R$ tiene rango 2.