

**Examen final - Tema A (2 horas)**

26 DE NOVIEMBRE 2013

MATE 1105

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

**Cada pregunta vale 2 puntos. Este examen tiene dos caras.**

**Ejercicio I**

Sea  $\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ . Se denota  $\mathcal{E}$  la base canónica (estándar) de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Halle el volumen de la caja generada por los vectores de  $\mathcal{B}$ .
2. Muestre que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Halle la matriz de transición (cambio de base) de la base  $\mathcal{E}$  a la base  $\mathcal{B}$ .
4. Halle las coordenadas del vector  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  en la base  $\mathcal{B}$ .

**Ejercicio II**

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. Halle los valores propios de  $A$ .
2. Para cada valor propio  $\lambda$  de  $A$ , halle una base *ortonormal* del sub-espacio propio asociado (se recuerda que el sub-espacio propio asociado a  $\lambda$  es  $E_\lambda := \ker(A - \lambda I_3)$ ).

**Ejercicio III**

Sea  $(\mathcal{C})$  la cónica de ecuación  $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ .

1. Escriba la ecuación anterior bajo la forma  $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$  donde  $A$  es una matriz simétrica real  $2 \times 2$ .
2. Halle una matriz ortogonal  $C$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $A = CDC^t$  (donde  $C^t$  denota la transpuesta de la matriz  $C$ ).
3. Identifique la cónica  $(\mathcal{C})$  y dibújela en el marco de coordenadas  $(x, y)$ .

**Ejercicio IV**

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  y sea  $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

1. Halle la solución de mínimos cuadrados del sistema  $Ax = b$ .
2. Halle la proyección ortogonal de  $b$  al plano de  $\mathbb{R}^3$  generado por las columnas de  $A$ .

**Ejercicio V**

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea  $n$  un entero  $\geq 1$  y sea  $P_n$  el espacio de polinomios de grado  $< n$ . Sea  $T : P_3 \longrightarrow P_2$  una aplicación de rango 2. Entonces  $\ker T$  tiene dimensión 1.

2. La aplicación lineal  $T : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x & + & 2y \\ y \end{pmatrix} \end{matrix}$  es diagonalizable.