Parcial 3 - Tema A

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Mostrar que el polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

2. Dé los valores propios de A e indique sus respectivas multiplicidades algebraicas.

3. Para cada valor propio λ de A, halle una base del sub-espacio propio correspondiente: $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$.

4. Diga si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $C^{-1}AC = D$ (se pide justificar que C es invertible).

5. Calcule $A^5 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio II

Se consideran los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,-1)$ y $B = (1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$ y se denota $\mathcal{P}$ el plano generado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

1. Halle el área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2. Halle una base de la recta $\mathcal{P}^\perp$ (el complemento ortogonal de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$).

3. Halle la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a la recta $\mathcal{P}^\perp$.

4. Halle la distancia entre el punto $C = (1,0,1)$ y el plano $\mathcal{P}$.

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces la matriz de la transformación lineal

$$T : \begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & P_2 \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

en la base canónica $(1, X, X^2)$ de P_2 es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, la matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es invertible.