Universidad de Los Andes — Álgebra lineal 1

Parcial 2 - Tema A

9 de marzo 2013 — MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**.

Ejercicio I

Sea $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales. Se recuerda que se dice que una matriz cuadrada A es simétrica si $A^t = A$ y se denota

$$\mathcal{S}(2;\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$$

el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2.

1. `2 puntos.` Muestre que $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$.

2. `2 puntos.` Muestre que $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$.

3. `2 puntos.` Determine la dimensión de $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$.

Ejercicio II

Sea R la recta de ecuación $y = -x$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta R: $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. `4 puntos.` Halle $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. `2 puntos.` Determine la matriz A de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (matriz estándar de T) y la expresión general de $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

3. `2 puntos.` Se recuerda que, para cualquier $n \geq 1$, se denota $T^n = T \circ \ldots \circ T$ la aplicación T compuesta n veces con sí misma. Calcule $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T^3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. `2 puntos.` ¿Cuál es la matriz estándar de T^2? ¿Y de T^{101}?

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (no se otorgarán puntos por respuestas no justificadas).

1. `2 puntos.` Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ x-y \end{pmatrix}$. Entonces la imagen de T en $\mathbb{R}^3$ es una recta (es decir, un sub-espacio vectorial de dimensión 1 de $\mathbb{R}^3$).

2. `2 puntos.` El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a 2.

3. `2 puntos.` Sea $P_2 = \mathbb{R}_2[X]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces $(1+X)$ y $(1+X^2)$ son linealmente independientes en P_2.