Examen final - Tema A (2 horas)

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Halle los valores propios de A y, para cada valor propio, una base del sub-espacio propio correspondiente.

2. Halle una matriz ortogonal C y una matriz diagonal D tal que $C^t AC = D$ (justifique su respuesta).

3. Identifique la cónica de ecuación $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ y dibújela.

Ejercicio II

Sea $\mathcal{P}$ el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $y - 2z = 0$: $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

1. Verifique que el vector $v = [0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]$ pertenece a $\mathcal{P}$ y halle una base ortonormal (v_1, v_2) de $\mathcal{P}$ tal que $v_1 = v$.

2. Complete la familia ortonormal (v_1, v_2) en una base ortonormal (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$.

3. Halle las coordenadas, en la base hallada en la pregunta **2**, del vector $u = [1, 2, 1]$.

Ejercicio III

Sea W el plano de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1 = [-1, 1, 1, -1]$ y $v_2 = [0, 1, 1, 0]$.

1. Halle una base ortonormal de W.

2. Halle la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, de la proyección ortogonal a W.

3. Si juntamos una base de W con una base de $W^\perp$, ¿cuál es la matriz, en la base de $\mathbb{R}^4$ así obtenida, de la proyección ortogonal a W?

Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. El sistema

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ -x & & +2z & = & 1 \\ & y & +3z & = & 3 \end{cases}$$

no tiene soluciones.

2. Si A es una matriz simétrica y P es una matriz cualquiera, entonces $P^t AP$ es simétrica.

3. Si v_1 y v_2 son dos vectores no nulos y ortogonales en $\mathbb{R}^n$, entonces son linealmente independientes.

4. Si C es una matriz 3×3 de determinante -2 y A es una matriz 3×3 de determinante 2, entonces el determinante de la matriz $2CA^2C^{-1}$ es igual a 8.