Parcial III – Álgebra Lineal

Noviembre 3 de 2012

*Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.*

Punto I. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) `2 Puntos.` Encuentre los valores propios de A.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre los espacios propios correspondientes a cada valor propio de A.

(iii) `2 Puntos.` Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio.

(iv) `2 Puntos.` Encuentre una matriz D *diagonal* y una matriz C *ortogonal* tales que $D = C^{-1}AC$.

(v) `2 Puntos.` Calcule el determinante de la matriz A^3.

Punto II. Considere el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y - z = 0\right\}.$$

(i) `2 Puntos.` Encuentre el complemento ortogonal $\mathsf{W}^\perp$ de W.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre una base B_W para W y una base $B_{\mathsf{W}^\perp}$ para $\mathsf{W}^\perp$.

(iii) `2 Puntos.` Verifique que la unión de las dos bases encontradas en el enunciado anterior forma una base B para $\mathbb{R}^3$. Encuentre las coordenadas del vector $\vec{x} = (1, 3, 5)$ en la base B.

(iv) `2 Puntos.` Encuentre la descomposición única $\vec{x} = \vec{x}_\mathsf{W} + \vec{x}_{\mathsf{W}^\perp}$ del vector $\vec{x} = (1, 3, 5)$, donde $\vec{x}_\mathsf{W} \in \mathsf{W}$ y $\vec{x}_{\mathsf{W}^\perp} \in \mathsf{W}^\perp$.

Punto III. Responda falso o verdadero, justificando su respuesta.

(i) `2 Puntos.` Si una matriz A es simétrica y ortogonal, entonces $A^2 = I$.

(ii) `2 Puntos.` El área del paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 2)$ es $2\sqrt{3}$.