Parcial II – Álgebra Lineal

Septiembre 22 de 2012

*Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.*

Punto I. Considere los vectores $\vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{w} = (1, -1)$ en $\mathbb{R}^2$.

(i) `2 Puntos.` Demuestre que el conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) `4 Puntos.` Hallar la matriz estándar[1] de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\vec{v}) = \vec{v} \qquad \text{y} \qquad T(\vec{w}) = \vec{0}.$$

Calcule $T(\vec{x})$ para $\vec{x} = (3, 1)$.

(iii) `2 Puntos.` Cuál es el rango de la matriz estándar de T? Explique.

Punto II. Sea $T : \mathrm{P}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(p(x)\right) = \begin{pmatrix} p(0) \\ -p'(0) \\ p(0) + p'(0) \end{pmatrix}.$$

(i) `2 Puntos.` Verifique que el polinomio $p(x) = 3x^2 - 2x^3$ pertenece a N_T, el espacio nulo de T.

(ii) `4 Puntos.` Encuentre una base para R_T, el rango o espacio imagen de T.

(iii) `2 Puntos.` Encuentre la dimensión de N_T.

Punto III. Responda falso o verdadero, justificando su respuesta.

(i) `2 Puntos.` La recta $\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(ii) `2 Puntos.` La aplicación $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \end{pmatrix}$ es una transformación lineal.

(iii) `2 Puntos.` Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base para V, entonces $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ es una base para W.

[1] Es decir, la matriz de la transformación T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.