Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Noviembre 27 de 2012

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, A es invertible y $\det(AB) = 0$, entonces $\det B = 0$.

b. El sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + 2x_2 & = & -2 \end{array}$$

tiene infinitas soluciones.

c. La dimensión del espacio de matrices simétricas 2×2 (matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ tales que $A^T = A$) es 2.

(10 Puntos) **II**. Sea R la recta de $\mathbb{R}^3$ generada por el vector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre R.

a. Calcule $T(\vec{x})$ para $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Muestre que los vectores $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forman una base para el subespacio $R^\perp$ (el complemento ortogonal de la recta R).

c. Encuentre la matriz de T en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

d. Encuentre la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

e. ¿Cuál es el rango de la transformación lineal T ?

(6 Puntos) **III**. Considere los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$, con la base canónica $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, y $P_2[x]$ con la base ordenada $B_2 = \{x^2, x, 1\}$. Sea

$$T : \mathbb{R}^2 \to P_2[x]$$

la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x + 1$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2$.

a. Calcule $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Encuentre una base para el núcleo (espacio nulo) y una base para la imagen (rango) de T.

c. Encuentre la matriz M_T de la transformación lineal respecto a las bases B_1 y B_2.

(6 Puntos) **IV**. La órbita de un planeta alrededor del sol está dada por la curva $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2$. Se quiere encontrar la distancia mínima que hay entre el planeta y el origen a lo largo del año, mediante los siguientes pasos:

a. Encuentre la matriz simétrica A tal que $5x^2 - 6xy + 5y^2 = \vec{x}^T A \vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, y diagonalícela.

b. Haga un dibujo de la curva.

c. Determine la distancia mínima de la curva al origen. ¿Qué puntos sobre la curva realizan tal distancia?

Tiempo máximo 2 horas. No se permite el uso de tablas, libros, apuntes, calculadoras ni aparatos electrnicos. Todo teléfono celular debe estar apagado.