

Examen Final - Tema A

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos junto a usted libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo así estén apagados. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA.** Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 /5pts	
2 /5pts	
3 /5pts	
4 /5pts	
5 /5pts	
Total: /25pts	

TIEMPO 2 HORAS

1. Considere el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 6y - 3z = 0 \\ -13x + 26y - 13z = 0 \end{cases}$$

- (a) [2pt] Encuentre la solución general al sistema.
- (b) [3pt] Encuentre tres soluciones no triviales al sistema.

2. Considere los puntos $p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} 499 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- (a) [2pt] Encuentre la ecuación del plano Π que pasa por los puntos p, q, r

- (b) [2pts] Sea $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Halle la distancia de s al plano Π del punto anterior.

- (c) [1pt] ¿Pertenece el punto s al plano Π ?

3. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y sea $L : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $L(B) = AB - BA$.

(a) [2pt] Sea $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ la base canónica de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Halle la matriz de representación de L con respecto a la base \mathcal{B} .

(b) [2pt] Halle una base para el espacio nulo de L .

(c) [1pts] Encuentre $\rho(L)$, la dimensión de la imagen de L .

4. Considere la cónica dada por la ecuación cuadrática $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$. Sea $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

(a) [1pt] Escriba la ecuación en la forma $A\vec{X} \cdot \vec{X} = 1$ donde A es una matriz simétrica.

(b) [4pts] Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Escriba la ecuación en las nuevas variables y grafique la cónica obtenida en el plano xy .

5. Responda falso o verdadero justificando su respuesta.

(a) [3pt] Sea V un espacio vectorial y u, v dos vectores en V . Si $w_1 = 2u + 3v$ y $w_2 = 3u + 4v$ son linealmente independientes entonces u y v son linealmente independientes.

(b) [2pt] Sean A, B dos matrices de 4×4 . Si $\det(A) = 499$ y $\det(B) = 1$ entonces $\det(-A^t B) = -499$