Álgebra Lineal
Nombre/Código: Noviembre 29 2016

Examen Final - Tema A

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos junto a usted libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo así estén apagados. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA**. Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 /4pts	
2 /4pts	
3 /4pts	
4 /4pts	
5 /4pts	
Total: /20pts	

Tiempo 2 Horas

1. Considere la ecuación cuadrática $2xy = 9$. Sea $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   (a) [1pt] Escriba la ecuación en la forma $A\vec{X} \cdot \vec{X} = 9$ donde A es una matriz simétrica.

   (b) [2pts] Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Escriba la ecuación en las nuevas variables y grafique la cónica obtenida en el plano xy.

   (c) [1pt] Halle la distancia más corta del origen a la cónica descrita por $2xy = 9$.

2. Sean $M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) [1pt] Muestre que $\vec{v}$ es una solución al sistema lineal $M \cdot \vec{X} = \vec{b}$

   (b) [2pts] Sean $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ las columnas de M. Escriba el vector $\vec{b}$ como una combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$.

   (c) [1pt] Sea W el espacio generado por $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ ¿Pertenece $\vec{b}$ a W?

3. Sean P_2 y P_3 los espacios vectoriales de polinomios de grado menor o igual a 2 y 3 respectivamente. Sea $T : P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx.$$

   (a) [`1pt`] Encuentre el espacio nulo de T.

   (b) [`1pt`] Encuentre $\rho(T)$ la dimensión de la imagen de T.

   (c) [`2pts`] Sea M la matriz de representación de T con respecto a las bases canónicas de P_2 y P_3. (Recuerde que la base canónica de P_n es $\{1, ..., x^{n-1}, x^n\}$). Muestre que existe $N \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$ tal que

$$NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por la recta $y = 3x$.

   (a) [`1pt`] Encuentre $W^\perp$, el espacio ortogonal a W.

   (b) [`1pt`] Encuentre $\dim(W^\perp)$.

   (c) [`2pts`] Encuentre $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\mathrm{Proy}_W(\vec{v})|| = 1$ y $||\mathrm{Proy}_{W^\perp}(\vec{v})|| = 1$.

5. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

   (a) [`1pt`] Muestre que la dimensión del espacio nulo de A es 2.

   (b) [`1pt`] Muestre que $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 1$.

   (c) [`2pts`] Muestre que A es diagonalizable y encuentre D, matriz diagonal, semejante a A. (*Sugerencia: Utilice los incisos (a) y (b).*)