Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL (A) – 1105

Mayo 19 de 2015

ESTE ES UN EXAMEN **individual**, NO SE PERMITE EL USO DE LIBROS, APUNTES, CALCULADORAS O CUALQUIER OTRO MEDIO ELECTRÓNICO. RECUERDE APAGAR Y GUARDAR SU TELÉFONO CELULAR. TODA RESPUESTA DEBE ESTAR **justificada** MATEMÁTICAMENTE. TIEMPO MÁXIMO 2 HORAS.

I. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. `[1 Punto]`. Halle una base para el espacio columna de A.

b. `[1 Punto]`. Halle una base para el espacio fila de A.

c. `[2 Puntos]`. Encuentre todas las soluciones al sistema homogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

d. `[2 Puntos]`. ¿Es A una matriz invertible? Explique.

II. Considere la transformacin lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

a. `[2 Puntos]`. Halle la representación matricial de la transformación respecto a la base canónica B_o.

b. `[2 Puntos]`. Pruebe que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

c. `[2 Puntos]`. Para $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ encuentre $[\vec{x}]_B$, el vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B.

d. `[2 Puntos]`. Encuentre las matrices de cambio de base de la base canónica B_o a la base B y de la base B a la base canónica B_o.

e. `[2 Puntos]`. Halle la representación matricial de la transformación respecto a la base B.

III. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

a. `[2 Puntos]`. Encuentre los valores propios y vectores propios de A.

b. `[2 Puntos]`. Encuentre una diagonalización ortogonal de A.

c. `[2 Puntos]`. Use lo anterior para identificar la cónica $5x^2 + 6xy - 3y^2 = 24$ y trace precisamente la gráfica correspondiente en el plano x-y.

IV. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. `[2 Puntos]`. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{a} + \vec{b}$.

b. `[2 Puntos]`. La distancia del punto $(2, 2, 2)$ al plano $\mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.