Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL (A) – 1105

Noviembre 25 de 2014

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios son 0 y 2, es invertible.

b. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios son 0 y 2, es diagonalizable.

c. Si $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces la imagen de T es un subespacio vectorial de W.

(8 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a. Encuentre los valores propios y vectores propios de A.

b. Encuentre una diagonalización ortogonal de A.

c. Use lo anterior para identificar la cónica $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ y trace precisamente la gráfica correspondiente.

d. Calcule $A^5\vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(6 Puntos) **III**. Considere la transformacin lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - 2y - z \\ x - y + 2z \\ x + 5z \end{bmatrix}$$

a. Halle el núcleo (espacio nulo) de la transformación T.

b. El vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ pertenece a la imagen de T?

c. Halle la matriz de representación de la transformación T con respecto a las bases ordenadas $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(6 Puntos) **IV**. Sea $S = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Halle una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $S^\perp$.

b. Encuentre la proyección ortogonal del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sobre el subespacio $S^\perp$.

c. Halle la distancia del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ al subespacio $S^\perp$.

Tiempo máximo 2 horas. No se permite el uso de tablas, libros, apuntes, calculadoras ni aparatos electrónicos. Todo teléfono celular debe estar apagado.