Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

OFRECIMIENTOS DE CURSOS ELECTIVOS

2022-20

<table>
<tr><td rowspan="4">Nivel del Curso*

4: posgrado __X_

3: final de carrera __X_

2: mitad de carrera ___

1: inicio de carrera ___</td><td>Nombre completo del curso en español

Geometría Simpléctica</td></tr>
<tr><td>Nombre completo del curso en inglés

Symplectic Geometry</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Profesor

Sergio Adarve</td></tr>
</table>

Descripción del curso en español

Este es un curso introductorio en Geometría Simpléctica. Uno de los rasgos más atractivos de este tópico es la interacción de conceptos provenientes de diversas áreas de la Matemática. De hecho, de manera muy natural, la Geometría Simpléctica es un paisaje que combina, entre otros, ideas y procedimientos provenientes de Topología Algebraica, teoría de Grupos de Lie, teoría de Representaciones, Mecánica clásica y, por supuesto, de la Geometría misma.

Este curso está destinado particularmente a estudiantes iniciando su maestría, pero se ajusta perfectamente a estudiantes de último año de pregrado. De hecho, para nuestros propósitos, los fundamentos usuales en Topología, Algebra Abstracta 1 y Algebra Lineal 2 son suficientes.

El curso es esencialmente autocontenido.

En la primera parte, hacemos el recorrido básico dirigido al Teorema de Stokes en variedades, introducimos la cohomología singular y probamos el Teorema de De Rham.

En la segunda parte definimos y desarrollamos las nociones necesarias relacionadas con variedades Riemannianas, variedades Simplécticas, haces fibrados y estructuras de Kähler. Terminamos esta parte con el Teorema de Darboux.

La tercera (y última) parte es una introducción a la teoría simpléctica cubriendo algunas bases en Geometría de Poisson y sistemas integrables. Terminamos con los conceptos de Grupos y Algebras de Lie, acciones de Grupos de Lie sobre variedades simplécticas y las denominadas aplicaciones momento. (Las ecuaciones de momento son una abstracción de las ecuaciones de Hamilton en mecánica clásica.)

Si el tiempo lo permite, se pueden incluir algunas ideas sobre teoría geométrica de invariantes.

Descripción del curso en inglés

This is an introductory course in Symplectic Geometry. One of the most attractive features of this topic is the interaction of concepts from diverse areas in Mathematics. In fact, in a very natural way, Symplectic Geometry is a landscape combining, among others, ideas and procedures from Algebraic Topology, Lie Group Theory, Representation Theory, Classical Mechanics and, of course, Geometry itself.

This course is particularly aimed at beginning masters students, but it is perfectly suited for undergraduate seniors. In fact, for our purposes, background in standard Topology, Abstract Algebra 1 and Linear Algebra 2 will suffice.

The course is essentially self-contained.

In the first part we go through basics leading to Stokes´ Theorem on manifolds, we introduce smooth singular cohomology, and we prove the De Rham Theorem.

In the second part we define and develop the necessary notions concerning Riemannian manifolds, Symplectic manifolds, fiber bundles, and Kähler structures. We end up this part with the Darboux theorem.

The third (and last part) is an introduction to symplectic theory covering some basics on Poisson structures and integrable systems. We finish with the notions of Lie groups and Lie algebras, actions of Lie groups on Symplectic manifolds, and the so called moment maps. (Moment map equations are a mathematical abstraction of the Hamilton equations in classical mechanics.)

If time permits, we may include some ideas on geometric invariant theory.

Prerrequisitos

Topología, Algebra Abstracta 1, Algebra Lineal 2

*Geometría Diferencial y/o Geometría Riemanniana son **deseables pero no necesarias**

Objetivos

1. Introducir los conceptos y procedimientos básicos de la Geometría Simpléctica.
2. Mostrar la interacción entre diversas áreas de la Matemática, en particular de Geometría Diferencial, Grupos y Álgebras de Lie, Topología Algebraica, Mecánica Clásica y Teoría de Representaciones.
3. Dar ilustraciones de algunas interpretaciones en la Física.
4. Sentar las bases para que los estudiantes puedan posteriormente profundizar en temas más exigentes en esta área tales como cobordismo, clases características, cuantización geométrica, geometría compleja, reducción, hiper estructuras, super simetría, algebroides, etc.

Contenido

Intensidad horaria: Dos sesiones semanales de dos horas cada una

1. **Symplectic Linear Algebra** (tres semanas)

a) Symplectic Vector Spaces
b) Hermitian Forms
c) Exterior Algebra

2. **Calculus on Manifolds** (tres semanas)

a) Vector Fields, Flows, and Lie Derivatives
b) Stokes Theorem, homology, and De Rham Theorem
c) Poincaré Duality

3. **Symplectic Manifolds** (tres semanas)

a) Riemannian and Symplectic Manifolds
b) Fiber Bundles
c) Kähler Manifolds
d) Darboux Theorem

4. **Hamilton Formalism** (tres semanas)

a) Poisson Brackets
b) Integrable Systems
c) Kepler Problem

5. **Moment Maps** (tres semanas)

a) Lie Groups
b) Moment Maps
c) Geometric Invariant Theory

Forma de Evaluación

Tarea:	**25%**
E. Parcial 1:	**25%**
E. Parcial 2:	**25%**
Exposición:	**25%**
TOTAL	**100 %**

Bibliografía

Texto principal

Heckman G., Symplectic Geometry, Lecture Notes, Radboud University (Netherlands), 2010.*

(*) Los estudiantes dispondrán adicionalmente de unas notas de clase elaboradas por el profesor para facilitar aquellas partes del texto de Heckman que pudieran necesitar algunos prerrequisitos o complementos puntuales (v.g. Álgebra Lineal Simpléctica, tensores, haces fibrados, acciones de grupos, etc.).

Bibliografía adicional

Cannas da Silva A., Lectures on Symplectic Geometry, Springer - Verlag, (revised) 2006.

Guillemin V., Ginzburg V., Karshon Y., Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions, AMS, 2002.

Hall B., Introduction to Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, Springer (Switzerland), 2015.

Madsen I., Tornehave J., From Calculus to Cohomology, Cambridge UP, 1997.

Warner F., Foundations of Differential Geometry and Lie Groups, Scott – Foresman & Co., 1971.

***Si el curso tiene código 3 y 4, por favor explique las diferencias en cuanto a contenido y formas de evaluación.**