

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
OFRECIMIENTOS DE CURSOS ELECTIVOS
2022-20

<p>Nivel del Curso*</p> <p>4: posgrado _____</p> <p>3: final de carrera _____</p> <p>2: mitad de carrera X</p> <p>1: inicio de carrera _____</p>	<p>Nombre completo del curso en español:</p> <p>Introducción al cálculo de variaciones y al control óptimo</p>
	<p>Nombre completo del curso en inglés:</p> <p>Introduction to the calculus of variations and optimal control</p>
	<p>Nombre abreviado en español (Máx. 30 caracteres contando espacios)</p> <p>Calc. de variac. y cont. óptim.</p>
	<p>Profesor: Rene Meziat</p>
<p>Descripción del curso en español:</p> <p>Este curso introduce a los estudiantes de física, matemáticas, ciencias, ingeniería y economía, en los métodos de solución generales de problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo, entendidos como familias de problemas de optimización definidos sobre familias de funciones sujetas a restricciones, que usualmente toman la forma de ecuaciones diferenciales. Además, se presenta a los estudiantes el potencial que tienen estas familias de problemas para modelar situaciones particulares dentro de la física, la ingeniería, las ciencias y la economía. En el curso se presentarán los métodos de solución de ambas familias de problemas, utilizando técnicas de cálculo avanzado, métodos de ecuaciones diferenciales y se presentarán, desde el comienzo, las herramientas analíticas para ello, como son los elementos esenciales de optimización en espacios de funciones infinito dimensionales, sus normas, las variaciones de primer y segundo orden, la caracterización de mínimos, de extremos y algunos elementos básicos de convexidad.</p> <p>El curso enfatiza sobre el papel de las condiciones de primer orden dadas en forma de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamadas Ecuaciones de Euler-Lagrange para problemas de cálculo de variaciones y ecuaciones de Hamilton para problemas de control óptimo, así como las pruebas formales de estas condiciones. Se dedicarán espacios significativos de la materia para las implicaciones en física, en ingeniería y economía mostrando como algunas de las ideas centrales de estas familias de problemas han permeado y forjado áreas centrales dentro de otras disciplinas. Previo al desarrollo de los problemas del control óptimo se presenta de forma breve y concisa los fundamentos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto de</p>	

sistemas dinámicos. El curso incluye algunos elementos de cálculo numérico, los problemas de existencia de soluciones y los fundamentos de la programación dinámica en tiempo continuo.

Descripción del curso en inglés:

This is an introductory course on Calculus of Variations and Optimal Control for students of Physics, Mathematics, Engineering, Economics and Science. The course presents the general methods for solving variational problems and optimal control problems regarded as optimization problems defined into sets of admissible functions, which may be constrained by differential equations sometimes. These kinds of problems are widely used as models in several areas of Science, Technology, Engineering and Economics. Students will be able to solve calculus of variations and optimal control problems by using the calculus of several variables, differential equations methods and several new analytical tools that will be fully explained. Some of these tools are optimization methods in functional spaces, properly defined norms of functions, variations of first and second order, the characterization of minima and extreme points, and some general results about convexity among many other analytical tools.

The course emphasizes on the first order conditions, which take the form of ordinary differential equations called Euler - Lagrange Equations for Calculus of Variations problems and Hamilton Equations for Optimal Control problems. There will be important sections entirely devoted to particular applications in Physics, Economics, Engineering and Science. We remark here that these techniques have shaped very important areas inside many other disciplines. Before students start with the topic about Optimal Control, they will review the essentials of Ordinary Differential Equations and its connections with Dynamical Systems.

The course includes the rigorous proof of existence of optimal solutions; it also includes some advanced topics related to continuous-time dynamic programming, and it includes numerical techniques for solving practical examples in different settings.

Prerrequisitos:

Tener aprobadas las dos materias:

MATE 1105 - Algebra Lineal 1 y MATE 1207 Cálculo Vectorial

ó equivalentemente, tener aprobadas las dos materias:

MATE 1253 – Algebra Lineal y Cálculo 3 y MATE 2711 Métodos Matemáticos para Economía

Objetivos:



Que estudiantes con una formación básica en cálculo de varias variables y ecuaciones diferenciales, puedan identificar un problema de cálculo de variaciones o de control óptimo y puedan aplicar apropiadamente los métodos generales para caracterizar su solución en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales. Además, que puedan comprender la relevancia de estos problemas como modelos fundamentales en algunas áreas relevantes de la física, la economía, las ciencias y la ingeniería.

Contenido:

PRIMERA PARTE: CÁLCULO DE VARIACIONES

- 1-Introducción a algunos espacios funcionales y sus normas.
- 2-Problemas de optimización en espacios infinito-dimensionales.
- 3-Mínimos locales, mínimos globales, variaciones, extremos y convexidad.
- 4-Problemas clásicos del cálculo de variaciones.
- 5-Ecuaciones de Euler-Lagrange.
- 6-Condiciones necesarias, lemas clásicos y condiciones de segundo orden.
- 7-Solución de algunos problemas clásicos de cálculo de variaciones: reflexión de la luz, curvas catenarias y braquistocronas (cicloides).
- 8-Principio de acción mínima en mecánica teórica.
- 9-Formulaciones Hamiltoniana y Lagrangiana de la mecánica teórica: ecuaciones canónicas de Hamilton, transformaciones y leyes de conservación.
- 10-Problemas variacionales con restricciones, restricciones integrales y otros tipos de restricciones.

SEGUNDA PARTE: CONTROL ÓPTIMO

- 11-Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones a los sistemas dinámicos.
- 12-Algunos problemas clásicos de control óptimo.
- 13-Ecuaciones de Hamilton y Principio del Máximo.



14-Solución de algunos problemas clásicos de control óptimo en economía y otras ciencias.

15-Conexiones entre el cálculo de variaciones y el control óptimo.

16-Problemas de control óptimo con extremo fijo y extremo variable.

17-Principio del máximo y su demostración.

18-Existencia de controles óptimos.

19-Problemas de control de tiempo óptimo.

TERCERA PARTE: TEMAS AVANZADOS

20-Programación Dinámica y las Ecuaciones de Hamilton Jacobi y Bellman.

21-Cálculo Numérico de Problemas de Cálculo de Variaciones y Control Óptimo.

22-Pruebas rigurosas de existencia de minimizadores.

23-Control Lineal y Cuadrático: Ecuaciones de Riccati.

Forma de Evaluación:

Dos exámenes parciales de 20% cada uno.

Dos trabajos prácticos de modelación de casos de aplicación por un 20% cada uno.

Un examen final de un 20%.

Bibliografía:

Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction, Daniel Liberzon, Princeton University Press, 2012.

Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, Suresh P. Sethi, Springer, 2018.

Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity, John L. Troutman, Springer, 1996.

Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Francis Clarke, Springer, 2013.

Introduction to Optimal Control Theory, Jack Macki, Aaron Strauss, Springer, 1982.

Optimal Control, Richard Vinter, Birkhauser, 2010.

Optimal Control, Arturo Locatelli, Birkhauser, 2001.



Optimal Control, Leonid T. Aschepkov, Dmitriy V. Dolgy, Taekyun Kim, Ravi P. Agarwal, Springer, 2016.

Optimal Control of a Double Integrator: A Primer on Maximum Principle, Arturo Locatelli, Springer, 2017.

Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Dover Books on Mathematics, Morton I. Kamien, Nancy L. Schwartz, 2012.

Calculus of Variations: An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises, (Texts in Applied Mathematics), Hansjörg Kielhöfer, Springer, 2019.

Primer on optimal control theory, Speyer, Jason Lee, SIAM, 2010.

Nota de René #1: Dicté este curso en el 2021-1 con una gran acogida y motivación, las encuestas fueron muy favorables.

Nota de René #2: he publicado varios papers bien posicionados en cálculo de variaciones y control óptimo, el curso está pensado para estudiantes tanto de matemáticas, de economía, de ciencias y de ingeniería que hayan superado un primer curso en ecuaciones diferenciales y cálculo en varias variables.