UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

CURSO CBU-A 2018-1

Nombre del curso: **Matemáticas y la Civilización de Occidente**

Créditos/horas: 3/3

Profesor: Hernando Echeverri Dávila

Prerrequisitos: ninguno Tipo A

Competencias: Se espera que al finalizar el curso el estudiante:

1. Aprecie el papel que ha desempeñado la matemática en el desarrollo de la civilización de occidente, así como la manera como la cultura occidental ha moldeado el avance de las matemáticas;
2. Pueda diferenciar entre los distintos tipos de conocimientos que se discuten en el curso, entre el mítico-religioso, el histórico, el académico-práctico, el práctico-aplicado, y el científico y matemático-deductivo, versus la superstición o la especulación sin sustentación;
3. Entienda y aprecie la potencia de los métodos matemático-deductivo y científico en la construcción de un cuerpo de conocimiento coherente y firme;
4. Pueda expresar y sustentar sus apreciaciones, observaciones y conclusiones coherentemente.

Descripción: Este curso pretende explorar los conceptos que se han desarrollado y madurado en distintas épocas sin los cuales no se podría concebir el mundo actual, o por lo menos, la matemática actual. Se puede pensar en reducirlos a cuatro grandes temas.

1. **La idea de número**. Esta marca el nacimiento de las matemáticas. Se estudiarán los diferentes sistemas de numeración para resaltar la importancia del desarrollo del sistema posicional en los sumerios, los hindúes, los árabes y los mayas y su introducción a Europa a través de Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci. También se verá el desarrollo del concepto de número de los naturales a los reales con sus extensiones a los complejos y los vectores.

2. **“El gran libro [de la naturaleza] está escrito en lenguaje matemático”**. Esta es una noción que comienza con la idea de número pero que tiene un desarrollo más amplio a los diferentes modelos matemáticos de la realidad, de la geometría, al cálculo y a la probabilidad, con sus

múltiples aplicaciones. Su punto cumbre está en la revolución científica iniciada alrededor de 1500. (La cita es de “El ensayista” de Galileo, 1623)

3. **La independencia del mundo físico**. Desde los pitagóricos se tiene conciencia de que las ideas matemáticas son abstracciones de la realidad física. Sin embargo, la discusión continúa hasta nuestros días de si estas ideas la preceden o la suceden, y en la misma tónica, si las matemáticas son una invención o un descubrimiento. A fines del siglo XIX las matemáticas finalmente se desembarazan de la discusión, convirtiéndose en un lenguaje libre de contexto, independiente de la realidad. Este tema toca con la teoría de conjuntos, la lógica matemática y los sistemas formales, los cuales han ayudado a definir cómo se piensa racionalmente.

4. **La simbiosis entre la matemática y el computador**. Desde el ábaco hasta el súper-ordenador de hoy, pasando por Pascal y por Leibniz, el computador es un sueño de las matemáticas hecho realidad. Por una parte, el computador ha sido un invento matemático, desde los bits hasta la concepción de los lenguajes de programación. Por otra, ha servido de instrumento para ampliar el horizonte matemático con luces nuevas en aspectos tan diferentes como el caos y la demostración de teoremas.

Metodología:

- Dos sesiones de hora y media. Según el tamaño del grupo, alternarán entre
  - exposición del profesor, diapositivas y videos
  - discusión de las lecturas y videos
  - talleres para explorar los temas matemáticos principales que se desarrollan en diferentes momentos históricos.
- Lecturas y videos seleccionados

Evaluación:

Un ensayo en dos entregas:		20%
2 Parciales:	20% c/u	40%
Talleres:		30%
Quizzes en línea		10%

NO HAY EXAMEN FINAL

Cronograma

Semana	Fecha	Tema
1	**Mi 24 ene**	**Mesopotamia y Egipto** Para la matemática y la ciencia fue mucho más importante el desarrollo que se dio en Mesopotamia que en el valle del Nilo. En ambas partes los números nacen de la mano de la escritura, pero una comparación resaltará la importancia del invento del sistema posicional en los números sumerios que facilita los cálculos con fraccionarios. Este sistema promocionaría la metalurgia, la farmacología y, sobre todo, la astronomía, la primera ciencia en florecer**.** Además, son los conocimientos de Mesopotamia los que más se esparcen, por su ubicación, a través de diferentes imperios.
	Vi 26	**Taller 1: Numeración sexagesimal**
2	**Mi 31**	**Problemas griegos** La ciencia babilónica contagia la orilla jónica del mar Egeo. Los conocimientos astronómicos aplicados a la navegación se transmiten a través de los fenicios, con el alfabeto. El terreno del nuevo escenario pone traba a los imperios. La respuesta griega de gobierno es la polis, que requiere cada vez más de las habilidades retóricas y lógicas de sus gobernantes. Con una clase dirigente con tiempo de ocio, nace la geometría como ciencia deductiva, que pronto se enfrentará con problemas que la retarán al máximo: la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo. El más trascendental, las magnitudes irracionales, que tendrá que resolverse para que se pueda demostrar el teorema de Tales a cabalidad. Desafortunadamente, el sistema de numeración sumerio que podría ayudar a resolverlo no se adoptará en Grecia.
	Vi 2 feb	**Taller 2: Construcciones con Regla y Compás.**
3	**Mi 7**	**Academia de Platón** En la Academia de Platón, tal vez la primera universidad de la historia, se juntan dos mentes brillantes. Eudoxio, el más grande matemático de la época helénica, dará una solución aceptable del problema de las magnitudes irracionales, hasta el punto que algunos historiadores ven en su trabajo las bases de la definición de los números reales. Con esta teoría tenderá los principios del cálculo integral, usando una modalidad del concepto de límite. A él también se le atribuye el método axiomático que Aristóteles, en cierta forma su discípulo, respaldará y explicará en sus trabajos sobre lógica. Sobre estos dos pilares se generará el primer borrador de los Elementos de Euclides. Sin embargo, el modelo del cosmos que surge de la Academia será un lastre para los siglos futuros.
	Vi 9	**Taller 3: Aristóteles “Del cielo”.**
4	**Mi 14**	**Aristóteles y Euclides** Los *Elementos* de Euclides es el libro más citado de la antigüedad, después de la Biblia. Vale la pena detenerse a explorarlo. Primero su estructura lógica: las definiciones, los axiomas y los teoremas. Cómo siguen las pautas de Aristóteles. El problema de las líneas, los puntos y el continuo. El problema de sus definiciones desde un punto de vista moderno. Tanto Aristóteles como Euclides coinciden en que los axiomas no se pueden demostrar, pero no parecen caer en cuenta del problema semejante con las definiciones.
	Vi 16	**Taller 4: Euclides *Los elementos*.**
5	**Mi 21**	**Elementos de Euclides** El Quinto Postulado de Euclides. Aun cuando en la semana 12 se volverá a tocar este tema, en este módulo se discutirán las posibles causas que llevaron a que se incluyera en los *Elementos*. También se presentarán

		los reparos que tuvo desde un principio. Por último, se revisará la estructura global de los *Elementos* que culmina en el Libro XIII con los sólidos platónicos.
	Vi 23	**Taller 5: Mediciones Astronómicas en Alejandría**
6	**Mi 28**	**De Arquímedes a Ptolomeo** Con la biblioteca de Aristóteles como núcleo, se desarrolla la biblioteca o museo de Alejandría –una nueva universidad– en la ciudad fundada por Alejandro Magno en Egipto a orillas del Mediterráneo. A pesar de la sombra del gran filósofo, en esta nueva era, llamada helenística, la ciencia y la tecnología tomarán un rumbo excepcional. La unificación del mundo de entonces por las conquistas de Alejandro Magno, junta teorías y prácticas científicas de los babilonios con las de los griegos, incluyendo el sistema sexagesimal y la astronomía rigurosa basada en mediciones de ángulos. Por una parte, Arquímedes, considerado el genio matemático de la antigüedad, continúa el trabajo matemático riguroso de la geometría, dejando un poco las ataduras del método de regla y compás para explorar más el cálculo integral. Además, inicia el desarrollo de la física, apartándose de la retórica de Aristóteles al utilizar la rigurosidad de la matemática. Los matemáticos y científicos de la biblioteca-museo seguirán sus pasos atreviéndose a medir con rigurosidad algunas distancias astronómicas: la circunferencia de la tierra, las distancias de la tierra a la luna y al sol, y los tamaños de estos astros. Aristarco osa contradecir el modelo geocéntrico aceptado, basado en Aristóteles, aunque no tiene seguidores. Finalmente, los trabajos de esta gran escuela de astrónomos y geógrafos culminan en las obras de Ptolomeo, quien les dará vida por otros mil años.
	Vi 2 mzo **Inicio1º Parcial**	**Taller 6: Arquímedes "Medida de un circulo"**
7	**Mi 7**	**Números indo-árabes** Con el Imperio romano, exceptuando a la zona de influencia de Alejandría, el desarrollo de las matemáticas se reduce a los requisitos mínimos de los trabajos de ingeniería y el comercio, aun cuando el calendario juliano impuesto por Julio César fue un legado importante de los sabios de Alejandría. Hacia los años finales, con el crecimiento de la influencia cristiana, se inició la persecución a los sabios, considerados paganos o herejes. Los filósofos de Alejandría y de la Academia, que seguía existiendo en Atenas, se refugiaron en territorios persas más allá de la frontera del Imperio. Nace entonces una nueva fuerza arrasadora, el Islam (622 d.C.), y con él, el Imperio árabe. Con los vestigios de la época helenista hay un renacer de la ciencia. La Casa de la Sabiduría en Bagdad, la ciudad más grande del mundo hacia 800 d.C., es la nueva "universidad" donde confluyen los sabios del momento. Allí llega la numeración decimal con sus algoritmos, traídos por comerciantes del reino de los Guptas en la India y Al-Khwarizmi (780-850) escribe sus tratados divulgándolos: *Aritmética* y *Álgebra*. El sistema de numeración indo-arábigo aún se demora en entrar a Europa, inmersa en el medioevo. Se requiere que el hijo de un comerciante de Pisa, Leonardo Fibonacci, aprenda a utilizarlos durante una estadía en el Magreb y los divulgue a los comerciantes europeos con su texto *Liber abaci* (1202)..
	Vi_9 **Entrega 1º Parcial**	**Taller 7: El Ábaco**.

8	Mi 14 **Inicio elección Tema Ensayo**	**Resurgimiento europeo** El resurgimiento europeo comienza con el segundo milenio de nuestra era. La Iglesia consigue una tregua hacia adentro de Europa, cambiándola por una guerra externa: las Cruzadas. Como consecuencia de unos gobiernos más estables, se mejora la agricultura con inventos como los molinos de agua y de viento y el arado de hierro con bestias herradas y se incrementa el comercio. La nutrición mejora y la población se triplica en los siguientes 300 años. Se inician las obras monumentales de las catedrales góticas. Con la decadencia del califato de Bagdad, crece la preponderancia del de Córdoba, que será una ventana para Europa a la ciencia antigua conservada por los árabes. Se fundan universidades en las ciudades importantes que divulgan el conocimiento recién develado. Se conocen textos griegos como la lógica de Aristóteles y los *Elementos* de Euclides. Y aunque Aristóteles se convierte en "el Filósofo" para el escolasticismo que toma las riendas de la enseñanza, existen pensadores originales como Guillermo de Ockham y Nicole Oresme que proponen alternativas a las teorías aristotélicas sobre el movimiento, utilizando matemáticas rudimentarias para describir trayectorias.
	Vi 16 30%	**Taller 8: Perspectiva**
9	Mi 21	**El Renacimiento y la Revolución Científica** Después de la crisis del siglo XIV, ocasionada por sequía y malas cosechas y por la peste bubónica traída desde Crimea, de nuevo, Italia lidera un resurgimiento. Encabezado por las artes y el comercio, durante el siglo XV, este resurgimiento es llamado el *Cuattrocento*. En las artes, los pintores descubren o se inventan las técnicas de la perspectiva que es, en el fondo, una nueva geometría. Esos mismos pintores y escultores, experimentarán con pigmentos y explorarán la anatomía y la óptica, y mucho más si nos referimos a Leonardo da Vinci (1452-1517). En álgebra, tres italianos, Cardano, Ferrari y Tartaglia resuelven las ecuaciones generales de 3º y 4º grados. En anatomía, Andreas Vesalius publica su anatomía y Harvey descubre la circulación de la sangre. En astronomía, Copérnico lanza póstumo su sistema heliocentrista del mundo.
	Vi 23 Último día de retiros	**Taller 9. Galileo "Dos nuevas ciencias"**
Lu 6 a Vi 30 de marzo: Semana de trabajo individual		
10	Mi 4 abr	**Galileo, Descartes, Leibniz y Newton** Los físicos y matemáticos, llamados filósofos naturales, son quienes continúan con la Revolución Científica en el siglo XVII. Descartes y Fermat, basados probablemente en el texto de Apolonio sobre cónicas, juntan el álgebra con la geometría en una geometría analítica, con la cual nace el lenguaje matemático de funciones. Galileo propone su teoría del movimiento usando funciones del tiempo. Estas dos corrientes se extienden en Leibniz y Newton, con el cálculo infinitesimal. Newton, además, lo usa para sentar las bases de una teoría general del movimiento.
	Vi 6	**Taller 10. Newton**
11	Mi 11 abr	**S. XVIII ciencia y revolución** La autoridad eclesiástica había sufrido una debacle durante la Reforma, pues los protestantes alegaban que el hombre no

		necesitaba a la Iglesia para interceder por él ante Dios. Con la Revolución Científica, esta autoridad sufre aún más, pues cualquiera podía investigar las propiedades el mundo con observación disciplinada y experimentación. John Locke, que propone estas nociones epistemológicas en su ensayo *Sobre el entendimiento humano*, resumen de su observación de sus colegas en la Royal Society, se aventura a escribir sobre política en *Dos tratados sobre el gobierno*, con la conclusión revolucionaria para esa época, que los hombres nacen libres e iguales en derechos y que el gobierno es un contrato social con obligaciones recíprocas entre los gobernados y los gobernantes. Científicos se unen con filósofos y políticos para promulgar estas ideas que finalmente desembocan en la Revolución Francesa y las revoluciones de independencia de los países de América. Los avances de la ciencia también tendrán sus desenlaces en la Revolución Industrial, aun cuando, en este caso la influencia será recíproca, como por ejemplo, con la máquina de vapor y la termodinámica.
	Vi 13	**Taller 11. Matemáticas en Colombia**
12	**Mi 18**	**Geometría no euclidiana** El descubrimiento de que la geometría euclidiana no es la única posible, y que no tiene que ser la que "rige" nuestra realidad, fue una revolución en el campo de las matemáticas. La causa de este descubrimiento estaba dentro de la misma teoría, el Quinto Postulado de Euclides. Venía siendo una piedra en el zapato que muchos matemáticos trataron de solucionar, hasta que se les ocurrió, a tres, que se podría hacer una geometría con su negación. Las repercusiones de este descubrimiento aún no han concluido, en la lógica, la epistemología, la física y la misma matemática, pues el determinante absoluto de las matemáticas ha dejado de existir.
	Vi 20 **Lu 23** **Entrega cuadro sinóptico Ensayo**	**Taller 12: Geometría no euclidiana.**
13	**Mi 25**	**Conjuntos y números reales** Aun antes de la consternación ocasionada por la geometría no euclidiana, los matemáticos venían intentando consolidar las bases de su disciplina. En particular, el cálculo, con su tratamiento del "infinito", no dejaba de preocuparlos. El concepto del continuo no se acababa de entender, después de las intervenciones de Eudoxio y Aristóteles en la antigüedad y de Euler, Gauss y Cauchy más recientemente, las dudas permeaban. En el siglo XIX, el esfuerzo se aumenta, hasta concluir con varias definiciones o construcciones de lo que se entiende por números reales, todas equivalentes. El proponente de una de ellas, Cantor, también habla de unos conceptos que le parecen más básicos que los mismos números, los conjuntos. Sin embargo, su teoría de conjuntos, suscita aún más temores y sospechas.
	Vi 27	**Taller 13. Conjuntos**

	Inicio 2º Parcial	
14	**Mi 2 mayo**	**Método axiomático** Hacia finales del siglo XIX se piensa que se tiene una solución. La idea consiste en perfeccionar el método que había propuesto Euclides de axiomas o postulados y basar *toda* la matemática en un número finito de axiomas de los cuales todos los teoremas deben deducirse. Para ilustrarlo, Hilbert propone un conjunto más minucioso de axiomas para la geometría euclidiana, Peano propone unos para los números naturales: 0, 1, 2, 3, 4, … (lo más sencillo de toda la matemática). También se desarrollan axiomatizaciones para la teoría de conjuntos, y para la misma lógica. Pero una teoría matemática axiomatizada debe cumplir algo importantísimo, ser consistente, es decir, no se puede poder demostrar una afirmación y su negación. ¿Cómo demostrar la consistencia de una teoría? El mismo Hilbert describe las propiedades que debe cumplir una tal demostración, pero el proyecto termina en el fracaso. En 1931, el matemático austriaco, Kurt Gödel demuestra que no se puede demostrar la consistencia aun de un sistema tan sencillo como los números naturales.
	Vi 4 **Entrega 2º Parcial**	**Taller 14. Sistemas Formales**
15	**Mi 9**	**Desarrollo del computador** Unos años más tarde, Alan Turing, matemático inglés, estudiante de doctorado en la Universidad de Princeton, se inventa una computadora ideal (no material) que puede hacer cualquier cosa que esté en las posibilidades del razonamiento humano. En principio, dándole suficiente tiempo, la máquina podría probar cualquier teorema que pueda demostrar un humano. La pregunta que se hacía era, cuáles son las limitaciones intrínsecas de la máquina. Estas también serían las limitaciones intrínsecas de la razón. En el fondo, la pregunta se acercaba a las investigaciones de Gödel. La Segunda Guerra Mundial estalló y Turing debió regresar a Gran Bretaña, donde fue clave en descifrar el código del enemigo usando una computadora de su diseño. Este fue el inicio de la informática, pues lo importante no era la máquina y su rapidez, sino el código o algoritmo, las instrucciones para resolver problemas. Los algoritmos permean las matemáticas actuales. Es más, hoy sabemos que el secreto de la vida está en los algoritmos que se encuentran codificados en el ADN.
	Vi 11	**Taller 15. Fractales (no se entrega)**
Entrega Final Ensayo		**Viernes 18 mayo** **NO HAY EXAMEN FINAL**

Referencias:

Lecturas escogidas de Platón y Aristóteles

Selecciones de *Elementos* de Euclides

Crosby, AW. *La medida de la realidad*. Barcelona: Crítica, 1998

Doxiadis, A. *El Tío Petros y la conjetura de Goldbach*. B Ediciones, 2000

Echeverri, H. Restrepo, A.M. Colombia: The role of mathematics in the making of a nation. En *Mathematics and its teaching in the southern Americas*. World Scientific, 2015

Echeverri, H. Más de mil años antes de Pitágoras, un método para encontrar ternas pitagóricas. *Hipótesis* 15, Nov 2013

Hostettler, M. El nacimiento del cero. *Hipótesis* 9, Mayo 2008

Luminet, JP*. Incendio de Alejandría*. Ediciones Byblos, 2003

Selecciones de Elementos de Euclides

Sovel, D. La hija de Galileo. Editorial Debate, 1999

Sovel, D. Longitud. Editorial Debate, 1995

Bibliografía:

Kline, Morris. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. 3 vols. Alianza Universidad, 1992.

________. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, 1972

Dunham, W. *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. Wiley & Sons, 1990.

Grattan-Guiness, I. *Rainbow of mathematics: A history of the mathematical sciences*. W.W. Norton, 2000.

Clark University Department of Mathematics and Computer Science History of Mathematics Home Page. *Euclid's Elements* <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/mathhist.html>.

University of St. Andrews School of Mathematics and Statistics. *The MacTutor History of Mathematics archive*. <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/>.